अवकल समीकरण एवं गतिविज्ञान

$y = x^2$

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^3+a^3)}} dx$

dy

डॉ. सुशील कुमार श्रीवास्तव

V $y = x^2$

मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

डा. एस. एल. सिंह
को
सप्रेम
सुशील श्रीवास्तव
२९-११-९०

अवकल समीकरण
एवं
गति विज्ञान

[बी० एस-सी० द्वितीय वर्ष के तृतीय प्रश्न पत्र
के नवीन पाठ्यक्रमानुसार]

लेखक
डॉ० सुशील कुमार श्रीवास्तव
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, अध्ययन मंडल गणित
एवं सांख्यिकी विभाग,
डा० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर

मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, भोपाल

अवकल समीकरण एवं गति विज्ञान : डॉ० सुशील कुमार श्रीवास्तव

Avkal Samikaran Avam Gati Vigyan : Sushil Kumar Srivastava

प्रादेशिक भाषाओं में विश्वविद्यालय-स्तरीय ग्रन्थों और साहित्य के लिए भारत सरकार के मानव संसाधन मंत्रालय (शिक्षा) की केन्द्र प्रवर्तित योजनान्तर्गत मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, भोपाल द्वारा प्रकाशित एवं भारत सरकार द्वारा रियायती दर पर उपलब्ध कराये गये कागज पर मुद्रित।

प्रथम संस्करण : 1989

मूल्य : 35 रुपये

प्रकाशक :
मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
रवीन्द्रनाथ ठाकुर मार्ग
भोपाल-462 003

मुद्रक :
प्रसाद मुद्रणालय
7, बेली ऐवेन्यू
इलाहाबाद-211 002

प्राक्कथन

म० प्र० हिन्दी ग्रन्थ अकादमी पिछले दो दशकों से आपके बीच काम कर रही है। शिक्षा के उच्च स्तरों पर मातृभाषा हिन्दी में पढ़ने वाले छात्र और पढ़ाने वाले प्राध्यापकगण अकादमी के काम से अपरिचित न होंगे। विज्ञान और मानविकी के लगभग पच्चीस विषयों की पाँच सौ से अधिक पुस्तकें प्रकाशित करके अकादमी ने यह सिद्ध कर दिया है कि हिन्दी भाषा आधुनिक ज्ञान-विज्ञान को समझने और व्यक्त करने में पूरी तरह सक्षम है। अंग्रेजी न जानने वाले बहुसंख्यक छात्रों ने इन पुस्तकों को अपना आधार बनाया है और इससे उनका आत्मविश्वास बढ़ा है।

1969 में अकादमी की स्थापना करते हुए केन्द्र सरकार ने संस्था से यह अपेक्षा की कि उच्च शिक्षा के हर स्तर पर हिन्दी की पुस्तकें सुलभ रहें, हिन्दी में पाठ्य-पुस्तक लेखन की परम्परा बने तथा शिक्षा केन्द्रों में एक ऐसी प्रक्रिया चले जो माध्यम परिवर्तन के विचार को उसकी अन्तिम परिणति तक पहुँचाये। अकादमी ने अपने दायित्व को निबाहते हुए शिक्षा केन्द्रों से जुड़े विद्वज्जनों के सहकार का दायरा बढ़ाने की लगातार कोशिश की और उनके अच्छे परिणाम निकले। अनेक प्राध्यापकों ने मूल हिन्दी में लेखन किया और कर रहे हैं तथा छात्रों ने शोध स्तर तक हिन्दी को वैकल्पिक अपना माध्यम बनाया और ऐसे छात्रों की संख्या दिनोदिन बढ़ रही है। इससे अकादमी का उत्तरदायित्व बढ़ गया है। इस बढ़े हुए उत्तरदायित्व को निबाहने के लिए संस्था प्राध्यापकों तथा शिक्षा केन्द्रों के पुस्तकालयों से और अधिक सक्रिय सहयोग की अपेक्षा रखती है। अकादमी की पुस्तकों को छात्रों तक पहुँचाने में प्राध्यापकों और पुस्तकालयों की बहुत बड़ी भूमिका है और मैं आश्वस्त हूँ कि सम्बन्धितों को अपनी भूमिका की पूरी-पूरी चेतना है। पुस्तकों का स्तर सुधारने की आवश्यकता भी मैं अनुभव करता हूँ और समझता हूँ कि छात्रों और अध्यापकों को समय-समय पर अकादमी से सीधा सम्पर्क करके पुस्तकों के गुण-दोषों की समीक्षा करनी चाहिए।

आपके हाथों में यह पुस्तक सौंपते हुए मैं आशा करता हूँ कि इससे आपकी एक आवश्यकता पूरी होगी ।

चित्रकांत जायसवाल
मंत्री, स्कूली शिक्षा तथा उच्च शिक्षा, मध्यप्रदेश शासन
एवं अध्यक्ष, म० प्र० हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
भोपाल

विषय सूची

भाग "अ" अवकल समीकरण

इकाई I

इकाई II

इकाई III

भाग ''ब'' गति विज्ञान

इकाई IV

भाग—अ

अवकल समीकरण

इकाई I : अध्याय 1
इकाई II : अध्याय 2
इकाई III : अध्याय 3

अध्याय 1

अवकल समीकरण की संकल्पना एवं हल

1.1 प्रारम्भिक परिभाषायें

दिये हुए चरों और अवकलों के किसी फलन को अवकल व्यंजक कहते हैं एवं जब किसी समीकरण में अवकल व्यंजक समाहित होता है, तब उसे अवकल समीकरण कहते हैं। जिन चरों के सापेक्ष अवकलन किया जाता है, उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं एवं जिनका अवकल लिया जाता है वे परतन्त्र चर कहलाते हैं। अतः अवकल समीकरण वह सभीकरण है जिसमें स्वतन्त्र चर, परतन्त्र चर एवं उनके अवकल समाहित हैं।

उदाहरणार्थ :

$$\frac{dy}{dx}=\sin x \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-p^2y \tag{2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{xdy}{dx}-y=0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=b^2\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{5}$$

यदि किसी समीकरण में केवल एक चार के सापेक्ष ही सारे अवकल हैं, तब उसे साधारण अवकल समीकरण कहते हैं, अन्यथा वह आंशिक अवकल समीकरण कहलाता है। उपरोक्त उदाहरणों में (1) से (4) तक एक ही स्वतन्त्र चर है अतः वे साधारण अवकल समीकरण है, जबकि (5) में दो स्वतन्त्र चर हैं अतः वह आंशिक अवकल समीकरण हैं। इस पुस्तक में हम केवल साधारण अवकल समीकरण का अध्ययन करेंगे।

किसी अवकल समीकरण की कोटि (order) उसमें समाहित महत्तम अवकल की कोटि होती है। उपरोक्त उदाहरणों (1) व (3) की कोटि 1 तथा (2) व (4) की कोटि **2** है। समीकरण में समाहित महत्तम कोटि के अवकल की घात को अवकल समीकरण की घात (degree) कहते हैं, जबकि समीकरण पूर्णतः परिमेयकृत किया जा चुका हो एवं उसमें कोई भिन्न (fraction) गुणांक न हो। उदाहरण (1) व (2) की घात 1 एवं (3) की घात 2 है। करणी को दूर करने के लिये वर्ग करने पर (4) की घात **2** ज्ञात होती है d^2y/dx^2 की घात 2 होगी।

1.11 अवकल समीकरण की रचना

अवकल समीकरण यान्त्रिकी, ज्यामिती, भौतिकी एवं रसायन शास्त्र आदि विषयों की समरूपायों में विद्यमान रहते हैं। इनका गतिविज्ञान में अनुप्रयोग का विशेष अध्ययन हम आगे के अध्यायों में करेंगे।

यहाँ हम कुछ उदाहरणों द्वारा यह दर्शायेंगे कि स्वेच्छ अचर राशियों का विलोपन साधारण अवकल समीकरणों के द्वारा किस प्रकार किया जा सकता है। मान लो

$$f(x, y, a)=0 \tag{1}$$

परतन्त्र चर y, स्वतन्त्र चर x एवं प्राचल a में एक सम्बन्ध है। इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right)=0, \tag{2}$$

प्राप्त होता है। (1) एवं (2) की सहायता से प्राचल a का विलोपन करने पर मान लो, हमें

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{3}$$

प्राप्त हुआ, जो कि x, y एवं dy/dx में एक सम्बन्ध है। तब (3) को प्रथम कोटि का अवकल समीकरण कहते हैं एवं (1) उसका व्यापक हल कहलाता है। अतः प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के हल में एक स्वेच्छ अचर समाहित होता हैं। पुनः मान लो कि दिया हुआ सम्बन्ध इस प्रकार है

$$f(x, y, a\ b)=0 \tag{4}$$

जिसमें दो स्वेच्छ अचरों का समावेश है। x के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर मान लो हमें प्राप्त होता है,

$$\phi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right)=0 \tag{5}$$

एवं

$$\phi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, a, b\right)=0 \tag{6}$$

(4), (5), (6) की सहायता से स्वेच्छ अचरों a एवं b का विलोपन करने पर हमें $x, y,\ dy/dx$ एवं d^2y/dx^2 में सम्बन्ध प्राप्त होगा, मान लो

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

जो कि द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण होगा। अतः द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण के हल में दो स्वेच्छ अचरों का समावेश है। इसी प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि n कोटि के अवकल समीकरण के व्यापक हल में n स्वेच्छ अचर होंगे। उदाहरण

(i) $$x=a\cos(pt-\alpha)$$

जो कि सरल आवर्त गति दर्शाता है।

हम स्वेच्छ अचर a एवं α का विलोपन करेंगे। t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt}=-pa\sin(pt-\alpha)$$

एवं

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-p^2a\cos(pt-\alpha)=-p^2x$$

अत: a एवं α का विलोपन करने पर हमें

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-p^2x$$

परिणाम प्राप्त हुआ, जो कि द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण है।

(ii) $$y=Ae^{Bx}$$

से स्वेच्छ अचर A एवं B का विलोपन करो।

x के सापेक्ष अवकल करने पर

$$\frac{dy}{dx}=ABe^{Bx}=By$$

पुन: अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=B\frac{dy}{dx}=B^2y$$

B का विलोपन करने पर

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{d^2y}{dx^2}$$

जो कि द्वितीय कोटि का है।

प्रश्नावली 1

निम्न समीकरणों में से स्वेच्छ अचरों का विलोपन करो :

1. $y=Bx+B^3$
2. $y=Be^{2x}+Ae^{-2x}$
3. $y=A\cos 3x+B\sin 3x$
4. परवलयों के उस निकाय का अवकल समीकरण ज्ञात करो जिनकी अक्ष x अक्ष है। [सुझाव : जिस परवलय की अक्ष x अक्ष है, उसका समीकरण होगा

$$y^2=4a(x-h)$$

इसमें से a एवं h का विलोपन करो]

5. सिद्ध करो कि मूल बिन्दु से निकलने वाली किसी भी सरल रेखा के लिये निम्न

$$\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$$

होगा।

6. वृत्तों के उस निकाय का अवकल समीकरण ज्ञात करो कि y अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करते हैं।

1.12 अवकल समीकरण का हल

परतन्त्र चर एवं स्वतन्त्र चर को समाहित करने वाला कोई सम्बन्ध, जो दिये हुये अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करता हो, उसका हल कहलाता है, उसे अवकल समीकरण का समाकल (integral) या पूर्वग (primitive) भी कहते हैं। हल को पूर्वग इसलिये कहते हैं, क्योंकि उसी से अवकल समीकरण की उत्पत्ति हुई है। यह आवश्यक नहीं है कि हल स्वेच्छ चर x का स्पष्ट (explicit) फलन हो। हमने पिछले अनुच्छेद (1.11) में देखा है कि अवकल समीकरण के व्यापक हल में समाहित स्वेच्छ अचरों की संख्या उसकी कोटि के बराबर होती है। यदि व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशेष मान दिये जायें तो इस प्रकार प्राप्त हल को विशेष हल (particular solution) कहते हैं।

व्यापक हल को एक से अधिक रूपों में लिखा जा सकता है, किन्तु एक रूप के स्वेच्छ अचर दूसरे प्रकार के स्वेच्छ अचरों से सम्बन्धित रहेंगे।

हमने 1.1 के साधित उदाहरण (1) में देखा है कि अवकल समीकरण $d^2x/dt^2=-p^2x$ का एक हल है

$$x=a\cos(pt-\alpha),$$

जहाँ a एवं α स्वेच्छ अचर हैं। इसी हल को दूसरे रूप में भी लिखा जा सकता है

$$x=b\cos pt+\beta\sin pt$$

जहाँ b एवं β स्वेच्छ अचर होंगे। अतः

$$b\cos pt+\beta\sin pt=a\cos pt\cos\alpha+a\sin pt\sin\alpha$$

अत: $b=a\cos\alpha$ एवं $\beta=a\sin\alpha$

इस प्रकार अचर b एवं β अचर a एवं α के फलनों के रूप में लिखे जा सकते है। विलोमत:

$$a=\sqrt{(b^2+\beta^2)},\ \alpha=\tan^{-1}\beta/b$$

इसी प्रकार का दूसरा उदाहरण है अवकल समीकरण $dy/dx=2xy$ जिसका व्यापक हल होगा

$$y=e^{x^2+c} \text{ या } y=de^{x^2}$$

यह स्पष्ट है कि अचर c एवं d स्वतन्त्र नहीं है, क्योंकि $d=e^c$, अर्थात् $c=\log d$.

कभी कभी अवकल समीकरण का वह हल अपेक्षित होता है जो कि दिये हुये कुछ प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। ऐसी स्थिति में स्वेच्छ अचरों में से सभी या कुछ के विशेष मान लेना होता है जो कि दिये हुये प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करें।

1.2 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के साधारण अवकल समीकरणों के हल की मानक विधियाँ

हम निम्न रूप के अवकल समीकरण पर ध्यान देंगे

$$M+N\frac{dy}{dx}=0 \tag{1}$$

जहाँ M एवं N दोनों x व y के फलन हैं।

इस समीकरण को हम अधिक सममित रूप में इस प्रकार लिखते हैं

$$Mdx+Ndy=0 \tag{2}$$

प्रत्येक अवकल समीकरण हलनीय नहीं होता।

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के व्यापक समीकरण को भी हमेशा हल नहीं किया जा सकता है, किन्तु यदि ये विशेष मानक रूप के हैं, तब वें हलनीय होते हैं। ये मानक रूप निम्न चार प्रकार के हैं :

(i) पृथक्करणीय चर (Variables separable)

(ii) समघात समीकरण (Homogeneous equation)

(iii) रैखिक समीकरण (Linear equation)

(iv) यथातथ समीकरण (Exact equation)

1.21 पृथक्करणीय चर रूप (Variables separable form)

अवकल समीकरण के इस रूप में (2) में $M=f(x)$ एवं $N=g(y)$ होगा, अर्थात् M केवल x का फलन है व N केवल y का ।

$$f(x)dx+g(y)dy=0 \tag{3}$$

समाकल करने पर हमें हल प्राप्त होगा

$$\int f(x)dx+\int g(y)dy=c \tag{4}$$

जहाँ c समाकल का स्वेच्छ अचर है, इस अचर c को हम किसी भी रूप में लिख सकते हैं । चूंकि (4) में जिन समाकलों का समावेश हैं, वे हल किये जा सकते हैं, अतः परिणाम किसी भी अवकल से मुक्त होगा व हमें अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त हो जायेगा ।

उदाहरण

(i) $$\frac{dy}{dx}=2xy$$

समीकरण के चरों को पृथक करने पर हमें प्राप्त होगा

$$\frac{dy}{y}=2xdx$$

समाकलन करने पर,

$$\log y=x^2+c$$

चूंकि c स्वेच्छ अचर है, हम इसे $\log a$ के रूप में लिख सकते हैं, अतः

$$\log y-\log a=\log y/a=x^2$$

इस प्रकार व्यापक हल होगा

$$y = ae^{x^2}$$

(ii) $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$\log \tan x + \log \tan y = \log c$$

या

$$\tan x \tan y = c$$

(iii) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 + yx^2)dy = 0$

यहाँ

$$y^2(1+x)dx + x^2(1+y)dy = 0$$

या

$$\frac{1-x}{x^2} dx + \frac{1+y}{y^2} dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$-\frac{1}{x} + \log x - \frac{1}{y} + \log y = c$$

या

$$\log xy - \frac{(x+y)}{xy} = c$$

प्रश्नावली 2

. हल करो

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$
2. $(1+y^2)dx - xydy = 0$
3. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$
4. $\sqrt{((a+x))}\dfrac{dy}{dx} + x = 0$

5. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2\ e^{-y}$

6. $X\frac{dy}{dx}+2y=xy\frac{dy}{dx}$

(संकेत $x^2y=V$ रखिये)

7. $\cos(x+y)dy=dx$

8. $y-X\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1+xy}$

(संकेत $V=x/y$ रखिये)

10. $dr=e(\sin\phi\ d\theta-\cos\theta\ dy)$

11. $(x-y^2)dx+2xydy=0$

(संकेत $V=y^2/x$ रखिये)

1.22 समघात समीकरण (Homogeneous Equations)

किसी फलन $f(x, y)$ को n घात का समघात फलन कहते हैं, यदि

$$f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n f(x, y)$$

उदाहरण :

(i) x^3-x^2y,

3 घात का समघात फलन है।

(ii) $e^{y/x}+\sin y/x$

शून्य घात का समघात फलन है ।

अवकल समीकरण

$$Mdx+Ndy=0,$$

को समघात समीकरण कहते हैं यदि $M(x, y)$ एवं $N(y, x)$ समान घात के समघात फलन हैं। अतः समघात समीकरण को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$\frac{dy}{dx}=f(y/x)$$

इन समीकरणों को हल करने के लिये प्रतिस्थापन $y=vx$ का उपयोग करते हैं तब

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

होगा। अतः

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$$

या

$$x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$$

या

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{f(v)-v} \qquad (1)$$

अब समीकरण के रूप (1) में चर पृथक्करणीय है अतः उसका समाकल होगा—

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dv}{f(v)-v}+C$$

समाकलन के पश्चात v के स्थान पर x/y लिखने पर हमें अन्तिम हल प्राप्त होगा।

उदाहरण : (i) हल करो

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

यह समघात समीकरण है, अतः प्रतिस्थापन $y=vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$$

अर्थात्

$$2x\frac{dv}{dx}=1+v^2-2v$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{2dv}{(v-1)^2}=\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\int\frac{2}{(v-1)^2}\,dv=\int\frac{dx}{x}+C_1$$

अतः

$$\frac{-2}{v-1}=\log x+C_1$$

किन्तु $v=y/x$ रखने पर

$$\frac{2x}{x-y}=\log x+C_1=\log cx$$

$$\therefore \qquad 2x=(x-y)\log cx$$

(ii) हल करो

$$(1+2e^{x/y})dx+2e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

यह शून्य घात का समघात समीकरण है। पूरे समीकरण में x/y की उपस्थिति से यह सुझाव आभासित होता है कि रूपान्तरण $x=vy$ का उपयोग किया जावे। तब

$$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}=\frac{2e^v(v-1)}{1+2e^v}$$

अत:

$$y\frac{dv}{dy}=-\frac{(v+2e^v)}{1+2e^v}$$

$$\therefore \qquad \int\frac{(1+2e^v)}{v+2e^v}\,dv=-\int\frac{dy}{y}+C_1$$

अर्थात्

$$\log(V+2e^v)=-\log y+C_1$$

$v=x/y$ रखने पर हल होगा $x+2ye^{x/y}=C$

(iii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$

$y=vx$ प्रतिस्थापित करने पर

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2+1}{v+1}$$

$$\therefore \quad \frac{(v+1)}{v^2+1}\,dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int\frac{2v\,dv}{1+v^2} + \int\frac{1}{1+v^2}\,dv = -\int\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$1/2 \log(1+v^2) + \tan^{-1} v = -\log x + C_1$$

$$\log x\sqrt{(1+v^2)} + \tan^{-1} v = C_1$$

$v = y/x$ रखने पर

$$\log \sqrt{(x^2+y^2)} + \log e^{\tan^{-1} y/x} = \log c$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x^2+y^2)}\,e^{\tan^{-1} y/x} = C$$

(iv) $[\sqrt{(x^2+y^2-y)}]dx + xdy = 0$

अत:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-\sqrt{(x^2+y^2)})}{x}$$

$y = vx$ प्रतिस्थापित करने पर

$$V + x\frac{dv}{dx} = V - \sqrt{(1+v^2)}$$

$$\therefore \quad \int\frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)}} = -\int\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\log(v+\sqrt{(1+v^2)}) = -\log x - \log c = \log c/x$$

अत: चरघातांकी (exponential) लेने पर

$$y + \sqrt{(x^2+y^2)} = C$$

प्रश्नावली 3

समीकरण हल करो

1. $(x^2-3xy+y^2)dy + xydy = 0$

2. $x(x-y)dy+y^2dx=0$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$

4. $x+y\frac{dy}{dx}=2y$

5. $(x^3-3xy^2)dx=(y^3-3x^2y)dy$

6. $x(x-y)\frac{dy}{dx}=y(x+y)$

7. $x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{(x^2+y^2)}$

8. $(2x-y)dy=(2y-x)dx$

9. $x\frac{dy}{dx}=y+2\sqrt{(y^2-x^2)}$

10. $x\cos y/x(ydx+xdy)=y\sin y/x(xdy-ydx)$

11. $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

1.23 समघात अवकल समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण (Equations Reducible to Homogeneous Equations)

निम्न रूप के समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+ay+c}{Ax+By+C}$$

को समघात समीकरण के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है; इसके लिए हमें नये चर ξ एवं η लेना होगा—

$$x=\xi+h, \quad y=\eta+k$$

जहाँ कि h एवं k अचर हैं, जिनका अभी चुनाव होना है। ये मान प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\eta+k)=\frac{d\eta}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}\quad\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$$

अतः अवकल समीकरण का रूप होगा :

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta+(ah+bk+c)}{A\xi+B\eta+(Ah+Bk+C)}$$

अब h एवं k का चुनाव इस प्रकार करें कि

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0 \\ Ah+Bk+C=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

तब हमें समघात अवकल समीकरण प्राप्त होगा जो कि प्रतिस्थापन $\eta=v\xi$ के द्वारा हलनीय है। इस तरह प्राप्त हल में ξ एवं η को क्रमशः $x-h$ एवं $y-k$ से बदलने पर हमें मूल चरों x, y में हल प्राप्त होगा।

विशेष स्थिति : उपरोक्त समीकरणों (1) का हल होगा :

$$\frac{h}{bC-Bc}=\frac{k}{cA-Ca}=\frac{1}{aB-Ab},$$

ये समीकरण हलनीय नहीं है यदि $aB-Ab=0$, अर्थात यदि $a/A=b/B$

इस स्थिति में अवकल समीकरण का रूप होगा :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{max+mby+C}$$

जो कि सामान्य निरीक्षण से ही पहचाना जा सकता है। ऐसे अवकल समीकरण को हल करने हेतु हमें

$$v=ax+by$$

प्रतिस्थापन करना होगा। तब

$$\frac{dv}{dx}=a+b\ \frac{dy}{dx}=a+b\ \frac{v+c}{mv+c}$$

इस परिवर्तित समीकरण में चर पृथक्करणीय है।

उदाहरण : (i) समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$$

समघात नहीं है, किन्तु

$$x=\xi+h, \quad y=\eta+k$$

विस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta-\xi+(k-h+1)}{\eta+\xi+(k+h+5)} \tag{2}$$

अतः h एवं k का ऐसा चुनाव करें कि

$$k-h+1=0$$

$$k+h+5=0$$

इनका हल है

$$h=-2, \quad k=-3$$

h एवं k के इन मानों को रखने पर, (2) का रूप होगा

$$\frac{d\eta}{d\eta}=\frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}$$

अतः $\eta=v\xi$ रखने पर

$$v+\xi\frac{dv}{d\xi}=\frac{v-1}{v+1}$$

या

$$\xi\frac{dv}{d\xi}=-\frac{(1+v^2)}{v+1}$$

अतः चरों को पृथक करने पर

$$\frac{(v+1)\,dv}{(1+v^2)}=\frac{-d\xi}{\xi}$$

समाकलन करने पर

$$\frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}\,dv+\int\frac{dv}{1+v^2}=-\int\frac{d\xi}{\xi}+C_1$$

$$\therefore \frac{1}{2}\log(1+v^2)+\tan^{-1}v=-\log\xi+C_1$$

या

$$\log\left(1+\frac{\eta^2}{\xi^2}\right)\xi^2+2\tan^{-1}\frac{\eta}{\xi}=C$$

अब $\xi=x+2$ एवं $\eta=y+3$ रखने पर

$$\log \{(x+2)^2+(y+3)^2\}+2 \tan^{-1} \frac{y+3}{x+2}=C$$

टिप्पणी : यह उदाहरण पिछले अनुच्छेद के उदाहरण (iii) के समान है; इसके सिवाय कि $(y-x)/(y+x)$ को $(y-x+1)/(y+x+5)$ से बदल दिया गया है। ध्यान रखें कि $y-x=0$ एवं $y+x=0$ मूल बिंदु से गुजरने वाली दो सरल रेखाओं को प्रदर्शित करते हैं $y-x+1=0$ एवं $y+x+5=0$ का प्रतिच्छेद बिंदु सुगमता से $(-2, -3)$ ज्ञात होता है। जब हम $x=\xi-2$, $y=\eta-3$ रखते हैं, तब हम वास्तव में अक्ष परिवर्तन करते हैं। नये अक्ष नये मूल विन्दु $(-2, -3)$ से पुरानी अक्षों के समानांतर है।

(ii) $$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

$$x=\xi+h,\ y=\eta+k$$

विस्थापित करने पर

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\xi-5\eta}{2\xi+4\eta} \tag{3}$$

अत: h एवं k का चुनाव ऐसा करें कि

$$2h-5k+3=0$$

$$2h+4k-6=0$$

इनका हल है $h=1$ एवं $k=1$

(स्पष्ट है कि समीकरण (3) को रूपांतरण के सम्पूर्ण विवरण को ज्ञात किये बिना भी लिखा जा सकता है)

अब समीकरण (3) में $\eta=v\xi$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d\eta}{d\xi}=v+\xi\frac{dv}{d\xi}=\frac{2-5v}{2+4v}$$

अत:

$$\xi \frac{dv}{d\xi} = \frac{2-7v-4v^2}{2+4v}$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{2+4v}{(1-4v)(2+v)} dv = \frac{d\xi}{\xi}$$

वाम पक्ष में आंशिक भिन्न लेने पर

$$\left\{\frac{4}{3} \frac{1}{(1-4v)} - \frac{2}{3} \frac{1}{(2+v)}\right\} dv = \frac{d\xi}{\xi}$$

समाकलन करने पर

$$-\frac{1}{3} \log (1-4v) - \frac{2}{3} \log (2+v) = \log \xi + C'$$

अर्थात्

$$\log (1-4v)(2+v)^2 \xi^3 = \log C$$

अत: $v=\eta/\xi$ रखने पर, हल होगा

$$(\xi-4\eta)(2\xi+\eta)^2 = C$$

अब $\xi=x-1$ एवं $\eta=y-1$ रखने पर अन्तिम हल होगा

$$(x-4y+3)(y+2x-3)^2 = C.$$

(iii) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+2}{2y-2x+3}$$

व्यंजक $(y-x)$ एवं $(2y-2x)$ से सुझाव प्राप्त होता है कि $y-x=v$ प्रति-स्थापित किया जाये, तब

$$\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dv}{dx}$$

अत: समीकरण का रूप होगा

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{2v+3}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{(1+v)}{2v+3}$$

$$\frac{2v+3}{v+1}\, dv = -dx$$

समाकलन करने पर

$$2v + \log(1+v) = -x + c$$

अतः

$$2y - 2x + \log(y-x+1) = -x + c$$

अर्थात्

$$\log(y-x+1) = x - 2y + c$$

प्रश्नावली 4

समीकरण हल करो :

1. $(x-y-1)\, dx + (4y+x-1)\, dy = 0$
2. $(x-y-2)\, dx + (x-2y-3)\, dy = 0$
3. $(x+y)\, dx + (3x+3y-4)\, dy = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x+1}{y-x+5}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+x+1}{2x+4y+3}$
7. $(x-y)\, dy = (x+y+1)\, dx$
8. $\dfrac{4x+6y+5}{3y+2x+4}\ \dfrac{dy}{dx} = 1$

1.24 विभिन्न प्रतिस्थापन

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

के रूप के अवकल समीकरण को रूपांतरण $xy = v$ के द्वारा हल किया जा सकता है। उदाहरण

(1) $$y(xy+1)\, dx + x(1+xy+x^2y^2)\, dy = 0$$

$xy=v,\quad y=v/x$ रखते पर

$$dy=\frac{xdv-vdx}{x^2}$$

इस रूपांतरण के फलस्वरूप

$$\frac{v}{x}\,(v+1)\,dx+x\,(1+v+v^2)\,\frac{xdv-vdx}{x^2}=0$$

जिसका पुर्नविन्यास करने पर

$$v^3\,dx-x\,(1+v+v^2)\,dv=0$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v^3}-\frac{dv}{v^2}-\frac{dv}{v}=0$$

समाकलन करने पर

$$\log x+\frac{1}{2v^2}+\frac{1}{v}-\log v=C_1$$

अतः हल

$$2x^2y^2\log y-2xy-1=Cx^2y^2$$

(2) $$(1-xy+x^2y^2)\,dx+(x^3y-x^2)\,dy=0$$

इसे पहिले

$$yf(xy)\,dx+xg(xy)\,dy=0$$

के रूप में लिखेंगे, अतः समीकरण में y का गुणा करने पर

$$y(1-xy+x^2y^2)\,dx+x(x^2y^2-xy)\,dy=0$$

रूपांतरण $xv=v,\quad y=v/x$, तथा

$$dy=\frac{xdv-vdx}{x^2},$$ करने पर

$$\frac{v}{x}(1-v+v^2)\,dx+x(v^2-v)\,\frac{xdv-vdx}{x^2}=0$$

या

$$vdx+x(v^2-v)\,dv=0$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{dx}{x}+(v-1)\ dv=0$$

समाकलन करने पर

$$\log x+\frac{1}{2}\ v^2-v=C_1$$

अतः हल है

$$2 \log x+x^2y^2-2\ xy=C$$

(3) $$\frac{dy}{dx}=(y-4x)^2$$

प्रतिस्थापन $y-4x=v$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx}-4=\frac{dv}{dx}$$

$$4+\frac{dv}{dx}=v^2$$

या

$$\frac{dv}{v^2-4}=dx,$$

समाकलन करने पर

$$\frac{1}{4}\ \log\ \frac{v-2}{v+2}=x+C_1$$

$$\therefore\ \ \log\ \frac{y-4x+2}{y-4x+2}=4x+4C_1$$

अतः

$$\frac{y-4x-2}{y-4x+2}=Ce^{4x}$$

(4) $$\frac{dy}{dx}=\tan^2 (x+y)$$

प्रतिस्थापन $x+y=v,\ 1+dy/dx=dv/dy$ करने पर

$$\frac{dv}{dx}=1+\tan^2 v=\sec^2 v$$

$$\therefore\ \ \cos^2 v\ dv=dx$$

या

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2v)\, dv=dx$$

समाकलन करने

$$\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\sin 2v=x+C_1$$

अत:

$$2(y-x)+\sin 2(x+y)=c$$

प्रश्नावली 5

समीकरण हल करो :

1. $y(1-xy)\, dx-x(1+xy)\, dy=0$
2. $(xy^2+y)\, dx+(x^2y-x)\, dy=0$
3. $\frac{dy}{dx}=-2(2x+3y)^2$
   (संकेत : $v=2x+3y$ प्रतिस्थापन करें)
4. $y^2(x^2+2)\, dx+(x^3+y^3)\,(ydx-xdy)=0$
   (संकेत : $y=vx$ प्रतिस्थापित करें)
5. $y(1+2xy)\, dx+x(1-xy)\, dy=0$
6. $(x-2\sin y+3)\, dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\, dy=0$
   (संकेत $\sin y=v$ प्रतिस्थापन करें)

1.25 रैखिक समीकरण (Linear Equation)

किसी अवकल समीकरण को रैखिक कहा जाता है, जबकि परतन्त्र चर एवं उसके अवकल गुणांक dy/dx की घात एक होती है। y एवं dy/dx के गुणांक x के कोई भी फलन हो सकते है।

अत: प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का रूप होगा :

$$\frac{dy}{dx}+P\,.\,y=Q \tag{1}$$

जहाँ P एवं Q, x के कोई भी फलन हैं (कन्तु y के फलन नहीं हैं) एक सरल उदाहरण है

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=x$$

यदि हम इसके दोनों पक्षों में x का गुणा कर दें, तब

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^2$$

अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(xy)=x^2$$

अतः समाकलन करने पर

$$xy=\frac{1}{3}x^3+C$$

इस उदाहरण में हम x को समाकलन गुणक कहेंगे।

समीकरण (1) को हल करने के लिए हम दोनों पक्षों में $e^{\int Pdx}$ का गुणा करेंगे, तब इसका रूप होगा

$$\frac{dy}{dx}\cdot e^{\int Pdx}+Py\cdot e^{\int Pdx}=Q\cdot e^{\int Pdx} \tag{2}$$

तब (2) का वाम पक्ष $y.e^{\int Pdx}$ का यथातथ अवकल (exact differential) होगा, अतः उसे हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{d}{dx}\left\{y\cdot e^{\int Pdx}\right\}=Q\cdot e^{\int Pdx}$$

समाकलन करने पर रैखिक समीकरण (1) का हल होगा :

$$y\cdot e^{\int Pdx}=C+\int Q\cdot e^{\int Pdx}\,dx \tag{3}$$

चूँकि, $e^{\int Pdx}$ से गुणा करने पर दिया हुआ अवकल समीकरण समकलनीय रूप में परिवर्तित हो जाता है, अतः उसे अवकल समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं।

टिप्पणी : कभी-कभी दिया हुआ अवकल समीकरण प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण तब बनता है जबकि हम y को स्वतन्त्र चर लें एवं x को परतन्त्र चर लें। साधित उदाहरण में यह तथ्य अधिक स्पष्ट हो जायेगा।

समीकरण

$$(2x-10y^3)\frac{dy}{dx}+y=0,$$

अभी जिस रूप में हैं, वह रैखिक नहीं है, किन्तु dx/dy से गुणा कर देने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2x-10y^3+y\frac{dx}{dy}=0$$

अर्थात्

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2x}{y}=10y^2$$

यह रैखिक समीकरण है, यदि y को स्वतन्त्र चर माना जाये।

उदाहरण : (1) अनुच्छेद 1.25 में उल्लिखित सरल उदाहरण को लें

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x},\ y=x$$

यहाँ $P=1/x$, अतः $\int Pdx=\log x$, एवं $e^{\log x}=x$ /

अतः उपरोक्त हल (3) में हमने जो नियम प्रतिपादित किया है, उससे वही समाकलन गुणक प्राप्त हुआ, जिसका हमने पहिले उपयोग किया है।

(2)

$$(x-1)\frac{dy}{dx}=y+2(x-1)^3$$

या

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-1}y=2(x-1)^2$$

अतः

$$\int P(x)\,dx=-\int\frac{1}{x-1}\,dx=-\log(x-1)$$

अतः समाकलन गुणक है

$$e^{-\log(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

अतः समीकरण का हल होगा :

$$y\left(\frac{1}{x-1}\right)=2\int(x-1)^2\cdot\frac{1}{(x-1)}\,dx=2\int(x-1)\,dx=(x-1)^2+c$$

अर्थात

$$y=(x-1)^3+c(x-1)$$

(3) $$(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}+2xy=x(1-x^2)^{1/2}$$

$(1-x^2)$ से भाग देने पर हमें प्राप्त होगा

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1-x^2}\,y=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

तब

$$\int P(x)\,dx=\int\frac{2x}{1-x^2}\,dx=-\log(1-x^2)=\log\frac{1}{1-x^2}$$

अतः

$$e^{\log\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{1-x^2}$$

अतः हल होगा :

$$y\,\frac{1}{1-x^2}=\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx=(1-x^2)^{-1/2}+c$$

$$\therefore\ y=C(1-x^2)+\sqrt{(1-x^2)}$$

(4) $$(2x-10y^3)\frac{dy}{dx}+y=0$$

समीकरण में dx/dy से गुणा करने पर प्राप्त होगा

$$(2x-10y^3)+y\,\frac{dx}{dy}=0$$

अर्थात्

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}\,x=10\,y^2$$

यह रैखिक समीकरण है, यदि y को स्वतन्त्र चर माना जाये। अतः समाकलन गुणक होगा :

$$e^{\int 2/y\,dy}=e^{2\log y}=e^{\log y^2}=y^2$$

तथा हल होगा

$$xy^2=\int(10y^2)\,.\,y^2\,dy+c=2y^5+c$$

अर्थात्

$$x=2y^3+C\,.\,y^{-2}$$

(5) हल करो

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$$

विशेष हल (particular solution) प्राप्त करो जबकि प्रारम्भिक प्रतिबन्ध हो :

$$x=\pi/2,\quad y=-4$$

समाकलन गुणक है A

$$e^{\int \cot x dx}=e^{\log \sin x}=\sin x$$

अतः व्यापक हल होगा :

$$y\sin x=5\int e^{\cos x}\sin x dx=-5\ e^{\cos x}+c$$

दिया है, जब

$$x=\pi/2,\quad y=-4$$

अतः

$$(-4)\,.\,1=-5(1)+c,\quad \therefore\quad C=1$$

अर्थात् विशेष हल है :

$$y\sin x+5\,e^{\cos x}=1$$

प्रश्नावली 6

1. $\frac{dy}{dx}+2xy=2\ e^{-x^2}$

2. $x\frac{dy}{dx}=y+2x^3+3x^2-2x$

3. $\cos^2 x\ \frac{dy}{dx}+y=\tan x$

4. $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$

5. $\frac{dy}{dx}=y\tan x-2\sin x$

6. $\frac{dy}{dx}+3y=e^x$

7. $(1+y^2)\,dx=(\tan^{-1}y-x)\,dy$
(संकेत y को स्वतन्त्र चर मान लें)

8. $\sec x\frac{dy}{dx}=y+\sin x$

9. $y\log y\,dx+(x-\log y)\,dy=0$

10. $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2\operatorname{cosec}2x$

11. $\frac{dy}{dx}+\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}y=\frac{ax^2}{1-x^2}$

12. $x\cos x\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1$

13. $(x+a)\frac{dy}{dx}-3y=(x+a)^5$

14. $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y$

15. $x(x-1)\frac{dy}{dx}-(x-2)y=x^3(2x-1)$

16. $x^3\frac{dy}{dx}+(2-3x^2)y=x^3$

17. $y(1+y^2)\,dx=2(1-2xy^2)\,dy$

18. $\frac{dy}{dx}-2y\cot 2x=1-2x\cot 2x-2\operatorname{cosec}2x$

19. समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+2y=e^x$$

का वह विशेष हल प्राप्त करो जो कि (0, 1) से गुजरता हो ।

20. समीकरण

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2yx-4x^2=0$$

को हल करो एवं वह त्रिघात वक्र प्राप्त करो जो कि इस समीकरण को सन्तुष्ट करता हो एवं मूल विंदु से गुजरता हो ।

1.26 **रैखिक समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण** (Equations reducible to the linear form).

वर्नूली समीकरण (Bernoulli's equations)*

निम्न रूप का समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+P\,.\,y=Q\,.\,y^n$$

जहाँ P एवं Q केवल x के फलन हैं, बर्नूली का समीकरण कहलाता है । समीकरण में y^n का भाग देने पर, (यदि $n>1$) हमें प्राप्त होगा :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,.\,y^{-n+1}=Q \tag{2}$$

$v=y^{-n+1}$ प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{dv}{dx}=(-n+1)\,.\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

अत: (2) का रूप होगा :

$$\frac{1}{(-n+1)}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$$

---

*(जैकब बर्नूली Jacob Bernoulli (1654-1705) बसले विश्वविद्यालय, स्विटजरलैंड में गणित के प्राध्यापक थे । उन्होंने 1695 में इस समीकरण का अध्ययन किया)

या

$$\frac{dv}{dx}+(-n+1)\,P\,.\,v=(-n+1)\,Q \qquad (3)$$

जो कि v में रैखिक अवकल समीकरण है। इसको हल करके हम v एवं x का सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं। अन्त में $v=y^{-n+1}$ रखने पर, हमें समीकरण का व्यापक हल प्राप्त हो जायेगा।

टिप्पणी : यदि $n=1$, तब समीकरण पृथक्करणीय चर रूप का है व रूपांतरण के बिना ही समाकलनीय है।

उदाहरण : (1) हल करो

$$\frac{dy}{dx}+y=y^2\,(\cos x-\sin x)$$

y^2 से समीकरण में भाग देने पर

$$y^{-2}\,\frac{dy}{dx}+y^{-1}=\cos x-\sin x$$

प्रतिस्थापन $y^{-1}=v$ रखने पर

$$-y^{-2}\,\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

अतः हमें प्राप्त होगा

$$\frac{dv}{dx}-v=\sin x-\cos x$$

इसका समाकलन गुणक है e^{-x}, अतः

$$vx^{-x}=\int(\sin x-\cos x)\,e^{-x}\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin x+c$$

अतः

$$\frac{1}{y}=C\,e^{x}-\sin x$$

(2)
$$xy-\frac{dy}{dx}=y^3\,e^{-x^2}$$

समीकरण में y^3 से भाग देने पर

$$x \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$$

$$v = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-2}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx}$$

रखने पर रूपांतरित समीकरण होगा

$$2xv + \frac{dv}{dx} = 2e^{-x^2}$$

(यह प्रश्नावली 6 का प्रथम प्रश्न है, केवल y के स्थान पर यहां v है) स्पष्टत: e^{x^2} समाकलन गुणक है, अत:

$$v.e^{x^2} = \int 2e^{-x^2}.e^{x^2}\, dx = 2x + c$$

अर्थात् हल होगा—

$$\frac{1}{y^2} = (2x+c)\, e^{-x^2}$$

अत: अंतिम हल होगा :

$$y = \pm \frac{e^{1/2x^2}}{\sqrt{(2x+c)}}$$

3. $$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x \cos y)$$

समीकरण में $\cos^2 y$ से भाग देने पर, प्राप्त होगा

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} - \sec y = -x$$

$v = \sec\ y, \dfrac{dv}{dx} = \sec y \tan y\ dy/dx$ रखने पर

$\dfrac{dv}{dx} - v = -x$, जो रैखिक है।

समाकलन करने पर

$$v.e^{-x} = \int(-x)e^{x}\, dx = xe^{-x} + e^{-x} + e^{-x} + c$$

अन्त में

$$\sec y = x + 1 + c\, e^{x}$$

प्रश्नावली 7

हल करो :

1. $x\dfrac{dy}{dx}+y=xy^3$

2. $\dfrac{dy}{dx}+2xy+xy^4=0$

3. $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2 \log x$

4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=xy^2$

5. $3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x+1}\ y=\dfrac{x^2}{y^2}$

6. $x\dfrac{dy}{dx}\ y+xy^3\ (1+\log x)$

7. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^2 \sin x$

8. $\cos x\ dy=y\ (\sin x-y)\ dx$

9. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\tan y}{1+x}=(1+x)\ e^x \sec y$

10. $\dfrac{dy}{dx}+1=4e^{-y}\ \sin\ x$

11. $\dfrac{dy}{dx}+y=y^2e^x$

12. $2\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-x^3 \cos y$

    (संकेत : y को स्वतन्त्र चर मान लें)

13. $y(1+y^2)\ dx=2(1-2xy^2)dy$

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{\tan^{-1} y-x}$

    (संकेत : y को स्वतंत्र चर लें)

15. $xdy - ydx = x\sqrt{(x^2 - y^2\, dy)}$

16. $2\dfrac{dy}{dx} - 2y \sec x = y^2 \sin 2x.$

1.3 यथातथ अवकल समीकरण (Exact Differential Equations)

परिभाषा : किसी अवकल समीकरण को यथातथ कहा जाता है यदि वह अपने पूर्वग (primitive) से सीधे अवकलन करके प्राप्त किया जाता है, अर्थात् बिना किसी राशि से गुणा या भाग किये, केवल अवकलन करके प्राप्त किया जाता है।

$$2xy^2dx + 2x^2ydy$$

को यथातथ अवकल कहेंगे, तथा

$$2xy^2dx + 2x^2ydx = 0$$

अर्थात्

$$d(x^2y^2) = 0$$

एक यथातथ अवकल समीकरण है, जिसका हल स्पष्टतः है

$$x^2y^2 = c$$

अतः

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

को यथातथ समीकरण कहेंगे यदि वाम पक्ष किसी फलन $U(x, y)$ का यथातथ अवकल है, अर्थात्

$$d\,u(x, y) = Mdx + Ndy$$

तब समीकरण का रूप होगा

$$d\,u(x, y) = 0$$

परिणामतः उसका संपूर्ण हल होगा :

$$u\,(x, y) = c$$

निम्न प्रमेय समीकरण (1) के यथातथ्य के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध बतलाता है। सर्वप्रथम आइलर (Euler) ने इसका प्रतिपादन किया।

प्रमेय 1. समीकरण (1) यथातथ हो, इसके लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

उत्पत्ति : मान लो

$$Mdx+Ndy=0,$$

(i) **आवश्यकता** : जहां M एवं N x व y के फलन हैं, एक यथातथ समीकरण है। तब, परिभाषा के अनुसार

$$Mdx+Ndy=du\ (x, y)$$

अर्थात् U, x व y का फलन है।

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\ dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

अतः $$M=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ एवं } N=\frac{\partial u}{\partial y}$$

पुनः आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial x} \text{ एवं } \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}$$

किंतु हमें ज्ञात है कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y dx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}$$

जिससे निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

अतः यदि (1) यथातथ समीकरण है तब प्रतिबन्ध (2) आवश्यक है।

(ii) **प्रर्याप्तता**—मान लो :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

मान लो $v(x,y)$ ऐसा फलन है कि

$$\frac{\partial V}{\partial x}=M(x, y),$$

तब

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

परिकल्पना के अनुसार

अतः

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \left(\text{चूँकि } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right)$$

अर्थात्

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$N \frac{\partial v}{\partial y}=f(y),$$

जहाँ $f(y)$ केवल y का फलन है

अर्थात

$$N=f(y)+\frac{\partial v}{\partial y}$$

अतः

$$Mdx+Ndy=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+f(y)dy$$

$$=dv+dF(y)$$

जहाँ

$$dF(y)=f(y)\,dy$$

$$=d(V+F)$$

अर्थात्

$$U(x, y)=V(x, y)+F(y)$$

जहां

$$F(y)=\int f(y)dy$$

अतः समीकरण (1) यथातथ है।

टिप्पणी : संबंध

$$N=f(y)+\frac{\partial v}{\partial x}$$

दर्शाता है कि $f(y)$ N का वह भाग हैं जो x से स्वतंत्र है।

समीकरण $Mdx+Ndy=0$ के समाकलन का नियम

यदि $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$, तब समीकरण यथातथ है, अतः निम्न विधि अपनाइये :

(i) $M(x, y)$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिये, अर्थात y को अचर मानते हुए इससे $V(x, y)$ प्राप्त होगा ।

(ii) अब y के सापेक्ष $N(x, y)$ के उस भाग का समाकलन कीजिये, जो कि x से स्वतंत्र है, इससे $F(y)$ प्राप्त होगा ।

अतः संपूर्ण पूर्वग होगा :

$$V(x, y)+F(y)=c$$

उदाहरण :

(1) $$(x^2-y)dx+(y^2-x)dy=0$$

यथातथ समीकरण है क्योंकि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)=-1=\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x)=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अब

$$\int M dx=\int(x^2-y)\,dx=\tfrac{1}{3}x^3-xy,$$

यह समाकलन y को अचर मानते हुये किया ।

N का भाग जो x से स्वतंत्र है, वह y^2 है ।

$$\int y^2 dy=\tfrac{1}{3}y^3$$

अतः संपूर्ण हल है ।

$$\tfrac{1}{3}(x^3+y^3)-xy=C$$

अन्य विधि : समीकरण का पुनर्विन्यास इस प्रकार करें ।

$$(x^2dx+y^2dy)-(ydx+xdy)=0$$

समाकलन करने पर

$$\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{3}y^3-xy=C$$

(2) $(y\cos x+\sin y+y)\,dx+(\sin x+x\cos y+x)dy=0$

जो कि $Mdx+Ndy=0$ के रूप में है ।

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x+\cos y+1=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अतः यह यथातथ समीकरण है ।

y को अचर मानते हुए M को x के सापेक्ष समाकलित करने पर

$$\int M dx = \int (y \cos x + \sin y + y)\, dx$$

$$= y \sin x + x \sin y + xy$$

चूँकि N का कोई भी पद x से स्वतंत्र नहीं है, अतः समीकरण का संपूर्ण हल होगा।

$$y \sin x + x \sin y + xy = C$$

(3) हल करो :

$$xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

यहाँ

$$M = x - \frac{y}{(x^2+y^2)} \text{ एवं } N = y + \frac{x}{x^2+y^2}$$

अतः

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

अर्थात समीकरण यथातथ है।

समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$$xdx + ydy + \frac{(xdy - ydx)/x^2}{1 + (y/x)^2} = 0$$

या

$$d\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + \tan^{-1} y/x\} = 0$$

अतः समाकलन करने पर व्यापक हल होगा।

$$x^2 + y^2 + 2 \tan^{-1} y/x = c$$

प्रश्नावली 8

1. $2x(ye^{x^2} - 1)\, dx + e^{x^2}\, dy = 0$
2. $(2x^3 + 3y)\, dx + (3x + y - 1)\, dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{(y+2)\, e^{y-x}}$

4. $(y^2 e^{xy^2}+4x^3)\, dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$

5. $(1+4xy+2y^2)\, dx+(1+4xy+2x^2)\, dy=0$

6. $y \sin 2x\, dx-(1+y+\cos^2 x)\, dy=0$

7. $(x\sqrt{(x^2+y^2)}-y)\, dx+(y\sqrt{(x^2+y^2)}-x)\, dy=0$

8. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{ax+hy+g}{hx+by+f}=0$

9. $(e^y+1) \cos x\, dx+e^y \sin x\, dy=0$

10. $(4x^3y^3+1/x)\, dx+(3x^4y^2-1/y)\, dy=0$

1.31 समाकलन गुणक (Integrating Factors)

कुछ अवकल समीकरण, जो यथातथ नहीं हैं, x व y के उचित फलन से गुणन के पश्चात यथातथ बनाये जा सकते हैं। ऐसे फलन को उस अवकल समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं।

समीकरण

$$\tan y dx+\tan x dy=0$$

अभी यथातथ रूप में नहीं है, किन्तु यदि हम $\cos x \cos y$ से गुणा कर दें, तब इसका रूप होगा :

$$\sin y \cos x\, dx+\sin x \cos y\, dy=0$$

जो कि यथातथ है, तथा उसका हल है

$$\sin y \sin x=c$$

1.32 निरीक्षण के द्वारा समाकलन गुणक

कभी कभी निरीक्षण के द्वारा समाकलन गुणक प्राप्त किया जा सकता है। निम्न साधित उदाहरणों से यह विधि स्पष्ट हो जायेगी। हल करो।

$$xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$$

समीकरण में जो भाग x एवं y में सममित है, उसे वाम पक्ष में रखने पर

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=dx$$

अतः $1/x^2+y^2$ समाकलन गुणक है, समाकलन करने पर

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)=x+C_1$$

अंतिम हल है

$$x^2+y^2=Ce^{2x}$$

(2) $$(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y+x)dx=0$$

पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$(x^2+y^2)\ (xdx+ydy)+(xdy-ydx)=0$$

पद $xdy-ydx$ से आभास होता है कि $1\ (x^2+y^2)$ समाकलन गुणक हो सकता है। इससे समीकरण में गुणा करने पर

$$xdx+ydy+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

या

$$xdx+ydy+\frac{(xdy-ydx)/x^2}{1+(y/x)^2}=0$$

समाकलन करने पर

$$\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+\tan^{-1}(y/x)=c_1$$

अंतिम हल होगा।

$$x^2+y^2+2\tan^{-1}(y/x)=c$$

(3) $$y(3x^2y+e^x)dx-e^xdy=0$$

पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$(ye^x\,dx-e^xdy)+3x^2y^2dx=0$$

$e^x f(x, y)$ प्रकार के फलन का अवकलन करने पर दो पद जो $e^xf(x, y)$ एवं $e^xf'(x, y)$ रूप के हैं, प्राप्त होंगे। प्रश्न में इस प्रकार के पद हैं, अतः तीसरे

पद में dx के साथ y नहीं होना चाहिये । अतः समालकन गुणक $1/y^2$ से गुणा करने पर

$$[(e^x/y)dx-(e^x/y^2]\ dy)+3x^2\ dx=0$$

अर्थात्

$$d(e^x/y)+d(x^3)=0$$

समाकलन करने पर

$$e^x/y+x^3=c$$

प्रश्नावली 9

निम्न अवकल समीकरणों में से प्रत्येक के लिये निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक ज्ञात करो, अतः उसे हल करो :

1. $(2x^3e^x-my^2)dx+nxydy=0$
2. $(y+x^2y^2)dx+xdy=0$
3. $y(2xy+e^x)dx-e^xdy=0$
4. $xdy-ydx=3x^2(x^2+y^2)dx$
5. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$
6. $(2xy^2e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$

   (संकेत e^y को समाहित करने वाले पद हैं)

   $y^4(2xe^ydy+x^2e^ydy)=y^4$.(यथातथ अवकल)

   इससे सुझाव मिलता है कि $1/y^4$ संभावित समाकलन गुणक है ।
7. $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$

   (संकेत : समीकरण को $d(x^2y^2)+d(xy)x^4y^3dy=0$, के रूप में लिखने पर सुझाव मिलता है कि $1/x^4y^4$ समाकलन गुणक है)
8. $xdx+ydy+4y^3(x^2+y^2)dy=0$
9. $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$

1.33 समाकलन गुणक ज्ञात करने के नियम

नियम 1. जब अवकल समीकरण $Mdx+Ndy=0$, प्रथम कोटि का n

घात का समघात समीकरण हो एवं $Mx+Ny \neq 0$, तब उसका समाकलन गुणक होता है : $1/(Mx+Ny)$

उपपत्ति : हमें दर्शाना है कि

$$\frac{M}{Mx+Ny}\,dy+\frac{N}{Mx+Ny}\,dy=0$$

यथातथ समीकरण है, अर्थात् हमें सिद्ध करना है कि

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)=\frac{(Mx+Ny)\,\frac{\partial M}{\partial y}-M\left(x\,\frac{\partial M}{\partial N}+N+y\,\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$=\frac{Ny\,\frac{\partial M}{\partial y}-MN-My\frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx-Ny)^2}$$

एवं

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)=\frac{(Mx+Ny)\,\frac{\partial N}{\partial x}-N\left(x\,\frac{\partial M}{\partial x}+M+y\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$=\frac{Mx\frac{\partial N}{\partial x}-MN-Nx\frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2}$$

चूँकि

$$x\,\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=nM$$

$$x\frac{\partial N}{\partial y}+y\frac{\partial N}{\partial y}=nN$$

n घात के समघात फलनों के लिये आइलर प्रमेय के द्वारा

अतः

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx-Ny}\right)$$

$$= \frac{N x\left(\frac{\partial M}{\partial x} + y\ \frac{\partial M}{\partial y}\right) - M\left(x\ \frac{\partial N}{dx} + y\ \frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{N(nM)-M(nN)}{(Mx+Ny)^2} = 0$$

चूँकि

$$Mx+Ny \neq 0$$

यदि $Mx+Ny=0$ तब $M/N=-y/x$, अतः अवकल समीकरण का रूप होगा $ydx-xdy=0$ इसका समाकलन गुणक होगा $1/xy$

विकल्प विधि : चूँकि

$$Mdx+Ndy = \frac{1}{2}\left\{(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}$$

$$=1/2\{(Mx+Ny)d(\log xy)+(Mx-Ny)d(\log x/y)$$

या

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} = \frac{1}{2}d(\log\ xy) + \frac{1}{2}\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}d(\log\ x/y) \quad (3)$$

दिया है कि $Mdx+Ndy$ समघात व्यंजक है,

अतः

$$\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny} \text{ भी समघात व्यंजक होगा ।}$$

अतः यह x/y का फलन होगा, किन्तु $x/y=e^{\log(x/y)}$

अतः (3) का रूप होगा

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} = 1/2\ d(\log\ xy) + 1/2\ f(e^{\log\ x/y})\ d(\log\ x/y)$$

$$= 1/2\ d(\log\ xy) + 1/2\ dF(e^{\log(x/y)}) \quad (4)$$

जहाँ F ऐसा फलन है कि $dF(u)f(u)$ अब 4 का दायाँ पक्ष x एवं y के एक फलन का यथातथ अवकल है । अतः दिये हुए अवकल समीकरण को

$\frac{1}{Mx+Ny}$ से गुणा करने पर हमें यथातथ अवकल समीकरण प्राप्त होगा। इस-लिये $\frac{1}{(Mx+Ny)}$ एक समाकलन गुणक है।

उदाहरण 1. (1) हल करो

$$(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$$

समीकरण समघात है, तथा

$$\frac{1}{Mx+Ny}=1/x^5$$

एक समाकलन गुणक है। इससे गुणन के पश्चात् समीकरण बनता है।

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{x^4}{x^5}\right)dx-\left(\frac{y^3}{y^4}\right)dy=0$$

यह यथातथ समीकरण है क्योंकि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{4y^3}{x^5}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर (अर्थात् y को अचर राशि मानकर)

$$\int^x Mdx=\int^x\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^5}\right)dx=\log x-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}$$

अब चूँकि N में x से स्वतन्त्र पद है ही नहीं, अतः अंतिम हल होगा

$$\log x-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}=C_1$$

अर्थात्

$$y^4=4x^4\log x+Cx^4$$

(2) हल करो

$$(x^2y-2xy^2)dx-(x^3-3x^3y)dy=0$$

समीकरण प्रथम कोटि का समघात अवकल समीकरण है तथा,

$$Mx+Ny=(x^2y-2xy^2)x+(3x^2y-x^3)y$$

$$=x^2y^2\neq0$$

अतः समाकलन गुणक है

$$1/x^2y^2$$

$1/x^2y^2$ से समीकरण में गुणन के पश्चात् प्राप्त होगा

$$(1/y-2/x)dx+(3/y-x/y^2)dy=0$$

उपरोक्त समीकरण यथातथ है क्योंकि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

x के सापेक्ष M का समाकलन करने पर y को अचर मानकर

$$\int^x Mdx=\int^x\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{x}{y}-2\log x$$

अब N में x से स्वतंत्र पद $3/y$ है,

$$\int 3/y\, dy=3\log y$$

अतः समीकरण का व्यापक हल होगा

$$x/y-2\log x+3\log y=c$$

अर्थात्

$$x/y+\log y^3/x^2=c$$

नियम 2 : जब समीकरण $Mdx+Ndy=0$ का रूप है

$yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dy=0$, एवं $Mx-Ny\neq 0$, तब समीकरण का समाकलन गुणक होगी

$$1/(Mx+Ny)$$

उपपत्ति : जैसा कि नियम 1 की विकल्प विधि में दर्शाया है,

$$Mdx+Ndy=1/2\{(Mx+Ny)d(\log xy)+(Mx-Ny)d(\log x/y)\}$$

या

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}(d\log xy)+\frac{1}{2}d(\log x/y) \qquad (5)$$

किन्तु

$$\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}=\frac{xyf_1(xy)+yxf_2(xy)}{xyf_1(xy)-yxf_2(xy)}=f(xy)$$

$$=f(e^{\log xy})$$

$$=F(\log xy)$$

अत: (5) का रूप हो जाता है

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}F(\log xy)\ d(\log xy)+1/2\ d(\log x/y)$$

जो कि यथातथ समीकरण है।

अत:

$(1/Mx-Ny)$ समीकरण $Mdx+Ndy=0$, का समाकलन गुणक हैं।

यदि $Mx-Ny=0$, तब $M/N=y/x$, तथा

समीकरण का रूप होगा

$$ydx+xdy=0,$$

जिसका हल है $xy=c$

उदाहरण ; हल करो

$$y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0$$

समीकरण का रूप है

$$yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dx=0$$

तथा

$$\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

समाकलन गुणक है,

क्योंकि

$$Mx-Ny=3x^2y^3\neq 0$$

इसके गुणन के पश्चात् समीकरण का रूप होगा—

$$\frac{x^2y^2+2}{3x^3y^2}dx+\frac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3}dy=0$$

जो कि यथातथ हैं क्योंकि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-4}{3x^3y^3}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अब M का समाकलन x के सापेक्ष करने पर (y को अचर मानकर)

$$\int^x M dx=\int^x\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^3y^2}\right)dx=\frac{1}{3}\log x\frac{1}{3x^2y^2}$$

N में x से स्वतन्त्र पद है $-2/3\ 1/y$

$$\int^y\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{y}\right)dy=-\frac{2}{3}\log y$$

अत: समीकरण का हल होगा

$$\frac{1}{3}\log x-\frac{1}{3x^2y^2}-\frac{2}{3}\log y=C_1$$

अर्थात्

$$x=Cy^2e^{1/x^2y^2}$$

(4) हल करो

$$y(xy\sin xy+\cos xy)dx+x(xy\sin xy-\cos xy)dy=0$$

इस समीकरण का रूप है

$$yf_1(xy)dx+xf_2(xy)dy=0,$$

एवं

$$Mx-Ny=2xy\cos xy\neq 0,$$

अत: समाकलन गुणक है

$$\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{2xy\cos xy}$$

इससे समीकरण में गुणन के पश्चात् प्राप्त होगा

$$(y/2\tan xy+1/2x)dx+(x/2\tan xy-1/2y)dy=0$$

यह यथातथ समीकरण है क्योंकि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan xy+\frac{xy}{2}\sec^2 xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अब M का समाकलन x के सापेक्ष करने पर (y को अचर मानकर)

$$\int^x M dx=\int^x 1/2(y\tan xy+1/x)dx$$

$$=-(1/2)\log(\cos xy)+(1/2)\log x$$

N में x से स्वतंत्र पद है $-1/2y$, अत:

$$\int^y\left(-\frac{1}{2y}\right)dy=-1/2\log y$$

अत: समीकरण का हल होगा

$$-(1/2)\log(\cos xy)+(1/2)\log x-(1/2)\log y=C_1$$

अर्थात्

$$x=cy\cos xy$$

नियम 3 : यदि

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x),$$

जो केवल x का फलन है, तब $e^{\int f(x)dx}$ समीकरण $Mdx+Ndy$ का समाकलन गुणक है।

उपपत्ति : दिए हुए अवकल समीकरण को $e^{\int f(x)dx}$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होगा

$$(Mdx+Ndy)e^{\int f(x)dx}=M_1dx+N_1dy$$

यदि यह यथातथ है, तब

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

होना चाहिये अब

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Me^{\int f(x)\,dx}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}\, e^{\int f(x)dx} \tag{6}$$

तथा

$$\frac{\partial N_1}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(N.e^{\int f(x)\,dx}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}\, e^{\int f(x)dx} + Ne^{\int f(x)dx}.f(x)$$

अब प्रतिबन्ध से $f(x)$ का मान रखने पर,

$$= \frac{\partial N}{\partial x}\, e^{\int f(x)dx} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) e^{\int f(x)dx}$$

$$= \frac{\partial M}{\partial y}\, e^{\int f(x)dx}$$

अत: (6) व (7) से स्पष्ट है कि

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \tag{7}$$

उदाहरण—

5. हल करो

$$(x^2+y^2+x)dx + xydy = 0$$

यहां

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

अतः समीकरण यथातथ नहीं है । किंतु

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/ N = \frac{2y-y}{xy} = 1/x = f(x),$$

एवं

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\int dx/x} = e^{\log x} = x$$

अब समाकलन गुणक x से गुणा करने पर, समीकरण होगा

$$(x^3+xy^2+x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

अतः M को x से सापेक्ष समाकलन करने पर (अर्थात् y को अचर मानकर)

$$\int^x M dx=\int^x (x^3+xy^2+x^2)dx= \frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

चूँकि N में x से स्वतंत्र पद है ही नहीं, अतः समीकरण का हल होगा

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=c_1$$

अर्थात् $$3x^4+6x^2y^2+4x^3=c$$

नियम : 4 यदि

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=F(y),$$

जो कि केवल y का फलन है, तब समीकरण $Mdx+Ndy=0$, का समाकलन गुणक है $e^{\int F(y)dy}$

उपपत्ति : निमम 3 की उपपत्ति के समान ही है।

स्मरण रखने के लिये समाकलन गुणक ज्ञात करने के चारों नियमों को निम्न तालिका में दर्शाया गया है।

क्रमांक	प्रतिबन्ध	समाकलन गुणक
1.	$Mdx+Ndy=0$, समघात है एवं $Mx+Ny\neq 0$	$\frac{1}{(Mx+Ny)}$
2.	$M=yf_1(xy)$, $N=xf_2(xy)$ $Mx-Ny\neq 0$	$\frac{1}{(Mx-Ny)}$
3.	$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$	$\int f(x(dx$
4.	$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=F(y)$	$e^{\int F(y)dy}$

उदाहरण

(6) हल करो

$$(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$$

यहाँ

$$\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^{3ey}+2xy^4e^y+6xy^2+1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2yx^4e^y-2xy^2-3; \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

अत: समीकरण यथातथ नहीं है

किन्तु

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=-8xy^{4ey}-8xy^2-4$$

एवं

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right) M=\frac{-4(2xy^{3ey}+2xa^2+1)}{y(2xy^3e^y+2xy^2+1)}$$

$$=\frac{-4}{y}=F(y)$$

तब

$$e^{\int F(y)dy}=e^{\int -4/y\ dy}=e^{-4\log y}=1/y^4$$

अत: समाकलन गुणक $1/y^4$ से गुणा करने पर समीकरण होगा :

$$(2xe^y+2x/y+1/y^3)dx+(x^{2ey}-x^2/y^2-3\ x/y^4)dy=0$$

अब M का समाकलन x के सापेक्ष करने पर (y को अचर मानकर)

$$\int^x Mdx=\int^x (2x^{ey}+2\ x/y+1/y^3)dx=x^{2e}\,y+x^2/y+x/y^3$$

चूँकि N में x से स्वतंत्र कोई पद नहीं है, अतः समीकरण का अंतिम हल होगा

$$x^2e^y+x^2/y+x/y^3=c$$

नियम 5 : यदि अवकल समीकरण का रूप है

$$x^a y^b(my\,dx+nx\,dy)+x^r y^s(py\,dx+qx\,dy)=0$$

जहां a, b, m, n, r, s, p एवं q अचर हैं ;

तब समीकरण का एक समाकलन गुणक है

$$x^h y^k$$

जहां h एवं k इस प्रतिबन्ध के द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं कि $x^h y^k$ से गुणन के पश्चात् समीकरण यथातथ हो जायेगा ।

उपपत्ति : प्रतिपादित समाकलन गुणक, $x^h y^k$, से गुणन के पश्चात् समीकरण होगा

$$(mx^{a+h}\,y^{b+k+l}+px^{r+h}y^{s+k+l})dx$$
$$+(nx^{a+h+l}y^{b+k}+qx^{r+h+1}y^{s+k})dy=0$$

चूँकि अब उपरोक्त समीकरण यथातथ हैं, अतः इसमें

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अर्थात्

$$m(b+k+1)x^{a+h}y^{b+k}+p(s+k+1)x^{r+h}y^{s+k}$$

$$=n(a+h+1)x^{a+b}y^{b+k}+q(r+h+1)x^{r+h}y^{s+k}$$

अतः दोनों पक्षों के समान पदों के गुणांकों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा

$$m(b+k+1)=n(a+h+1)$$

एवं

$$p(s+k+1)=q(r+h+1)$$

इन दो समीकरणों को हल करके h एवं k प्राप्त होगा ।

उदाहरण

6. हल करो

$$x(4y\,dx+2x\,dy)+y^3(3y\,dx+5x\,dy)=0$$

समीकरण अभी यथातथ नहीं है, अतः $x^h y^k$ रूप का समाकलन गुणक होगा। इससे गुणन के पश्चात् समीकरण का रूप होगा।

$$(4x^{h+1}y^{k+1}+3x^h y^{k+4})\,dx+(2x^{h+2}y^k+5x^{h-1}y^{k+3})\,dy=0 \quad (A)$$

यदि यह यथातथ समीकरण है, तब $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ होगा, अर्थात

$$4(k+1)\,x^{h+1}y^k+3(k+4)\,x^h y^{k+3}$$
$$=2(h+2)\,x^{h+1}y^k+5(h+1)\,x^h y^{k+3}$$

अतः दोनों के समान पदों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा।

$$4(k+1)=2(h+2)$$

एवं

$$3(k+4)=5(h+1)$$

इन समीकरणों का हल है $h=2$ एवं $k=1$

अतः समीकरण का समाकलन गुणक है x^2y

h एवं k के मान समीकरण (A) में प्रतिस्थापित करने पर

$$(4x^3y^2+3x^2y^5)\,dx+(2x^4y+5x^3y^4)\,dy=0$$

अतः M को x के सापेक्ष समाकलन करने पर

(y को अचर मानते हुए)

$$\int^x Mdx=\int^x (4x^3y^2+3x^2y^5)dx$$

$$=x^4y^2+x^3y=C$$

अब चूँकि N में x से स्वतंत्र पद है ही नहीं, अतः समीकरण का व्यापक हल है।

$$x^4y^2+x^3y^5=c$$

प्रश्नावली 10

निम्न अवकल समीकरणों के समाकलन गुणक ज्ञात करो, अतः उनको हल करो :

1. $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$
2. $y(2xy+1)\ dx+x\ (1+2xy-x^3y^3)\ dy=0$
3. $ydx+x(1-3x^2y^2)\ dy=0$
4. $y(20x^2+8xy+4y^2+3y^3)\ dx+4x(x^2+xy+y^2+y^3)\ dy=0$
5. $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)\ dx+2(y^3+x^2y+x)dy=0$
6. $(x^2+y^2+2x)\ dx+2ydy=0$
7. $(xy^3+y)\ dx+2(x^2y^2+x+y^4)\ dy=0$
8. $y(3x+2y^2)\ dx+2x(2x+3y^2)\ dy=0$
9. $(8ydx+8xdy)+x^2y^3\ (4ydx+5xdy)=0$
10. $(xy^2+2x^2y^3)\ dx+(x^2y-x^3y^2)\ dy=0$
11. $(x^3e^x-my^2)\ dx+mxydy=0$
12. $(3x^2y^4+2xy)\ dx+(2x^3y^3-x^2)\ dy=0$
13. $y(x^2y^2+xy+1)\ dx+x(x^2y^2-xy+1)\ dy=0$

विविध प्रश्नावली 11

निम्न अवकल समीकरणों को हल करो :

1. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$
2. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{xy}{1-x^2}=xy^{1/2}$
3. $(x^2+y^2-a^2)\ xdx+(x^2-y^2-b^2)ydy=0$
4. $x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y^2}{x^2}=y$

5. $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$

6. $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

7. $y(1+xy)\, dx + x\,(1-xy)\, dy = 0$

8. $(x-y)^2 \dfrac{dy}{dy} = a^2$

9. $(x^2y^3 + xy)\dfrac{dy}{dx} = 1$

10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y \log y}{x} = \dfrac{y\,(\log\, y)^2}{x^2}$

11. $(1+e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$

12. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

13. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{ax+hy+g}{hx+by+f} = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$

15. $y^2(ydx + 2xdy) = x^2(2ydx + xdy)$

16. $2 \sin x \dfrac{dy}{dx} - y \cos x = xy^3 e^x$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}\,(e^x - e^y)$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2+1}{2xy}$

19. $3e^x \tan y = (e^x - 1) \sec^2 y \dfrac{dy}{dx}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x-2y} + x^2 e^{-2y}$

21. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$

22. $(x^2y^3+xy)\,dy=dx$

23. $xdx+ydy=m(xdy-ydx)$

24. $xdy=\{y+xy^3(1+\log x)\}dx$

25. $4x^2y\frac{dy}{dx}=3x\,(3y^2+2)+2(3y^2+2)^3$

26. $xdy-ydx=x\sqrt{(x^2-y^2)}\,dy$

27. $(xy^3-y^3-x^2e^x)\,dx+3xy^2dy=0$

(संकेत : $y^3=vx$, प्रतिस्थापित करो)

28. $y\,(y^2-2x^2)\,dx+x(2y^2-x^2)\,dy=0$

29. $\frac{dy}{dx}+x(x+y)=x^3(x+y)^3-1$

30. $x\frac{dy}{dx}=y(1-x\tan x)+x^2\cos x$

31. $x\frac{dy}{dx}=2y+x^3e^x$

को हल करो, दिया है $y=0$, जब $x=1$

32. यदि समीकरण $Pdx+Qdy=0$, एक समाकलन गुणक μ (जो कि केवल x का फलन है) के द्वारा यथातथ बनाया जा सकता है, तो सिद्ध करो कि :

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

y से स्वतंत्र होना चाहिये ।

33. $\frac{dy}{dx}\,2y\tan x=\sin x$

को हल करो,

दिया है $y=0$, जब $x=\pi/3$

34. $1+y^2+(x-e^{\tan^{-1} y})\,\dfrac{dy}{dx}=0$

35. $\dfrac{dy}{dy}=\dfrac{2x-y+1}{x+2y-3}$

1.4 हल का अस्तित्व एवं अद्वितीयता
(Existence and. Uniqueness of solution)

इस अनुच्छेद में हम उन प्रतिबन्धों का अध्ययन करते हैं जिनके अंतर्गत किसी प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के प्रारंभिक मान समस्या (initial value problem) के अद्वितीय हल का अस्तित्व है ।

यदि किसी भौतिक समस्या का गणितीय प्रादर्श (mathematical model) एक साधारण अवकल समीकरण है, जिसके साथ कुछ प्रारंभिक प्रतिबन्ध भी हैं, तब इस प्रादर्श के निम्न गुणधर्म भी होना चाहिये, तभी वह भौतिक समस्या का उचित निरूपण कर सकेगा ।

(i) दिए हुए प्रारंभिक प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले एक हल का अस्तित्व होना चाहिये ।

(ii) उपरोक्त हल अद्वितीय होना चाहिये ।

इस अध्याय में कुछ विशेष रूप से अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों का हमने अध्ययन किया है । प्रारम्भ में गणितज्ञों को यह विश्वास था कि वे किसी भी अवकल समीकरण को हल करने की क्षमता रखते हैं, किन्तु कालांतर में उन्हें यह समझ में आ गया कि यह असंभव है । तब प्रश्न उठा कि क्या सामान्य अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व है कि नहीं । पिकार्ड के प्रमेय ने इसका सकारात्मक जवाब दिया हैं । इस प्रमेय का अध्ययन करने के पहिले हम रिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन की विधि का अध्ययन करेंगे ।

1.41 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण के समाकलन की पिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन की विधि :
(Picard's Method of Successive Approximations)

हम निम्न प्रारंभिक मान समस्या का हल प्राप्त करेंगे ।

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),\ y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

जहाँ बिंदु (X_0, Y_0) के किसी सामीप्य (neighbourhood) में फलन $f((x, y)$ संतत है।

अब (1) का समाकलन करने पर

$$y = \int f(x, y)\ dx + c$$

तथा प्रारंभिक प्रतिबन्ध का उपयोग कर, हमें प्राप्त होगा :

$$y = y_0 + \int_{xo}^{x} f(x, y) dx \qquad (2)$$

समाकल्य (integrand) में y की उपस्थिति के कारण समाकल का मान ज्ञात करना क्लिष्ट होगा, अतः हम उत्तरोत्तर सन्निकटन की विधि का अनुप्रयोग करेंगे। हमने प्रारंभ में ही मान लिया है कि फलन (fx, y) संतत है। यह भी हमारी मान्यता है कि अन्तराल $(x + x_o)$ छोटा है, तथा इसके संगत y में वृद्धि भी छोटी है।

समाकल (2) में Y_o की जगह Y रखने पर हमें y का प्रथम सन्निकटन प्राप्त होता है :

$$Y_1 = Y_0 + \int_{xo}^{x} f(x, Y_0)\ dx \qquad (3)$$

अब चूँकि (3) में समाकल्य केवल X का फलन है (Y_0 अचर राशि है), अतः यह समाकलित किया जा सकता हैं। अब इसी प्रकार इस मान Y_1 को समाकल (2) में रखने पर हमें द्वितीय सन्निकटन Y_2 प्राप्त होगा :

$$Y_2 = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\ dx \qquad (4)$$

इसी प्रकार तृतीय सन्निकटन Y_3 निम्न रूप से दिया जायेगा।

$$Y_3 = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\ dx \qquad (5)$$

इस प्रक्रिया को उत्तरोत्तर आगे बढ़ाने पर, हमें nवां सन्निकटन निम्न रूप में प्राप्त होगा,

$$Y_n = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

टिप्पणी : इस विधि के प्रणेता इ० पिकार्ड थे, जो कि पेरिस विश्वविद्यालय में गणित के प्राध्यापक थे ।

उदाहरण : पिकार्ड विधि से निम्न समीकरण को हल करो :

$$\frac{dy}{dx} = x - y; \text{ जब } x = 0, \quad \text{तब } y = 1$$

y का तृतीय सन्निकटन प्राप्त करो ।

हल : यहां

$$f(x, y) = x - y,\ X_0 = 0,\ Y_0 = 1;$$

तब

$$Y_1 = Y_0 + \int_0^x f(x, Y_0)\, dx$$

$$= 1 + \int_0^x (x - 1)\, dx = 1/2\ X^2 - X + 1,$$

$$Y_2 = Y_0 + \int_0^x f(x, y_1) dx = 1 + \int_0^x (-1/2\ x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= -(1/6)\ X^3 + X^2 - X + 1$$

$$Y_3 = Y_0 + \int_0^x f(x, y_2) dx = 1 + \int_0^x (1/6\ x^3 - x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{24} x^4 - \tfrac{1}{3}\, x^3 + x^2 - x + 1$$

टिप्पणी : दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्वंग है ।

$$y = x - 1 - ce^{-x}$$

दिये हुए प्रारंभिक प्रतिबन्धों, $x = 0$, $y = 1$ को संतुष्ट करने वाला विशेष हल

होगा $y=x-1+2e^{-x}$ e^{-x} को इसकी मैकलारिन श्रेणी से बदलने पर विशेष हल का रूप होगा :

$$y=1-x+x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{16}x^5+\ldots\ldots$$

इस हल को उपरोक्त प्राप्त किये गये उत्तरोत्तर सन्निकटन से तुलना करने पर ऐसा ज्ञात होता है कि पिकार्ड विधि के द्वारा प्राप्त किये गये सन्निकटनों का अनुक्रम सीमांत में वास्तविक हल की ओर अग्रसर होता है ।

(2) पिकार्ड विधि से हल करो :

$$\frac{dy}{dx}=2-\frac{y}{x} \text{ जहां } y=2 \text{ जब } x=1$$

सामान्य विधि से भी इसे हल करो :

यहां

$$f(x, y)=2-y/x,\ X_0=1,\ Y_0=2;$$

तब

$$y=2+\int_1^x (2-y/x)\,dy$$

अतः y के मान का प्रथम सन्निकटन, y_1, प्राप्त होगा जबकि उपरोक्त समाकल में हम y को $Y_0=2$ से बदल देंगे, अर्थात

$$Y=2+\int_1^x (2-2/x)\,dx$$

$$=2+\Big[2x-2\log x\Big]_1^x=2x-\log x$$

इसी प्रकार समाकल में y के स्थान पर y_1 रखने पर द्वितीय सन्निकटन y_2 प्राप्त होगा :

$$y_2=2+\int_1^x\left(2-2+2\frac{\log x}{x}\right)dx$$

$$=2x+(\log x)^2$$

अब y के स्थान पर समाकल में y_2 रखने पर तृतीय सन्निकटन y_3 प्राप्त होता है ;

$$Y_3=2+\int_1^x\left\{2-2/x-\frac{(\log x)^2}{x}\right\}dx$$

$$=2+\left[2x-2\log x-\tfrac{1}{3}(\log x)^3\right]_1^x$$

$$=2x-2\log x-\tfrac{1}{3}(\log x)^3$$

सामान्य विधि :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}$$

अर्थात

$$(2x-y)\,dx-xdy=0$$

जो कि स्पष्टतः यथातथ समीकरण है ।

पुनर्विन्यास करने पर

$$2xdx-(ydx+xdy)=0$$

समाकलन करने पर

$$x^2-xy=c,$$

किन्तु जब

$$x=1,\ y=2,\ :\ x^2-xy=1$$

अर्थात

$$y=x+1/x$$

1.42 **लिपशीज़ प्रतिबन्ध** (Lipschitz condition)

परिभाषा : कोई फलन $f(x, y)$, जो कि xy तल के किसी डोमेन D में परिभाषित एवं संतत है, y में लिपशीज़ प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है (या कि y में लिपशीज़ संतत है), संकेत रूप में $f\in \text{Lip } y'$, यदि ऐसे धनात्मक अचर k का अस्तित्व है कि D में बिन्दुओं के प्रत्येक युग्म (x, y_1), (x, y_2) के लिये

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1),|\leqslant k|y_2-y_1| \tag{1}$$

अचर k लिपशीज़ स्थिरांक (Lipschitz constant) कहलाता है ।

उदाहरणार्थ : $f(x, y)=xy^2$, जो कि तल के किसी भी सीमित भाग में संतत है, डोमेन $D: |x|\leqslant|, |y|\leqslant|$, में लिपशीज़ प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है क्योंकि

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|=xy_2{}^2-xy_1{}^2=x(y_2-y_1)\ (y_2+y_1)$$

$$\therefore\ |f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant|x|.|y_2+y_1|.|y_2-y_1|$$

किन्तु D में

$$|x|\leqslant 1,\ |y_2+y_1|\leqslant|y_2|+|y_1|\leqslant 2$$

$$\leqslant 2|y_2-y_1|$$

अर्थात यहां लिपशीज़ स्थिरांक 2 है ।

प्रमेय A : मान लो कि वास्तविक मान फलन $f(x, y)$ एवं $\partial f/\partial y$ एक आयत R में संतत हैं, जहां

$$R=\{(x, y) : |x-x_0|<a,\ |y-y_0)<b\},$$

अर्थात R बिन्दु (x_0, y_0) पर केन्द्रित है । यदि

$$|(\partial/\partial y)\ f(x, y)|\leqslant K,\ \forall (x, y)\in R,$$

जहां K धनात्मक अचर है, तब R में $f(x, y)$ लिपशीज़ प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है, तथा K लिपशीज़ स्थिरांक है ।

उपपत्ति : यदि R में (x, y_1) एवं (x, y_2) दो बिंदु हैं, तब माध्यमान प्रमेय के द्वारा ऐसी वास्तविक संख्या n का अस्तित्व है $y_1<n<y_2$ कि

$$f(x, y_2)-f(x, y_1)=\partial/\partial y\ f(x, n)\ (y_2-y_1)$$

चूंकि बिंदु

$$(x, n)\in R|\partial/\partial y|\ f(x, n)|\leqslant K,$$

अतः हमें प्राप्त होता है

$$|\ f(x, y_2)-f(x, y)|\leqslant K|y_2-y_1|$$

अर्थात् R में $f(x, y)$ लिपशीज़ प्रतिबंध को संतुष्ट करता है ।

टिप्पणी : y में लिपशीज़ सांतत्य $\Rightarrow y$ में सांतत्य, किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं हैं ।

परिभाषा (1) से स्पष्ट है कि जब $y_1 \to y_2$, तब

$$f(x, y_1) \to f(x, y_2)$$

किन्तु $f(x, y)=y^{1/2}$ डोमेन D में, संतत है, जहां

$$D=\{x, y) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1|\}$$

किन्तु

$$f(0, y)-f(0, 0)/y=0=1/\sqrt{y}$$

मूलविन्दु के प्रत्येक सामीप्य में अपरिबद्ध है, अतः $f(x, y) D$ में लिपशीज़ प्रतिबन्ध को संतुष्ट नहीं करता है ।

1.43 पिकार्ड प्रमेय (Picard's Theorem)

मान लो $f(x, y)$ एवं $\partial f/\partial y$ एक संवृत् आयत R में संतत है

$$R : |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \geqslant b,$$

एवं R में $|f(x, y)| \leqslant M$, $l=$न्यून $(a, b/M)$, तथा $|\partial f/\partial y| \leqslant N$,

तब प्रारम्भिक मान समस्या $dy/dx=f(x, y)$; $y=y_0$, जब $x=x_0$ का किसी अंतराल $|X-X_0| \leqslant l$ में अनन्य हल का अस्तित्व है ।

उपपत्ति : हमें समीकरण

$$y=y_0+\int_{x0}^{x} f(x, y)dx,$$

के हल का अस्तित्व सिद्ध करना है । हम पिकार्ड विधि से उत्तरोत्तर सन्निकटन $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ के अनुक्रम का निर्माण करेंगे । हमें ज्ञात है

$$y_n(x)=y_0+\int_{x0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

जहां $n=1, 2, 3, \ldots$

हम निम्न पांच सोपानों द्वारा सिद्ध करेंगे कि जब $n \to \infty$, y_n इच्छित हलो की ओर अभिसरित होता है ।

(i) चूंकि $f(x, y)$ एवं $\partial f/\partial y$ का अस्तित्व है एवं संतत है, अतः प्रमेय A से $f(x, y)$ लिपशीज़ प्रतिबंध को संतुष्ट करता है । अतः

$$|f(x, y_2) - f(x, y_0)| \leqslant N|y_2 - y_1|,$$

जहां N लिपशीज़ स्थिरांक है । यदि

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx,$$

समीकरण के हल का प्रथम सन्निकटन है, तब

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|(dx)$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b$$

अतः अंतराल $|x - x_0| \leqslant l$ में वक्र $y = y_1(x) R$ में स्थित है मान लो $y = y_{n-1}(x)$ R में स्थित है, तब

$$|y_n - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx\right|$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b$$

अतः आगमन (induction) के द्वारा परिणाम n के सभी मानों के लिये सत्य है ।

(ii) अब हम दर्शाते हैं कि

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$$

पहिले $n = 1$ के लिये, $|y_1 - y_0| \leqslant M|x - x_0|$

अब मान लो कि परिणाम n के लिये सत्य है, तब

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\int_{x0}^{x} |f(x, y_n)-f(x, y_{n-1})|dx$$

$$\leqslant N\int_{x0}^{x} |y_n-y_{n-1}|dx$$

$$\leqslant\frac{MN^n}{n!}\int_{x0}^{x} |x-x_0|^n dx$$

$$\leqslant\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

(iii) इस सोपान में हम सिद्ध करेंगे कि अनुक्रम $\{y_n(x)\}$ संवृत्त अंतराल $|x-x_0|\leqslant l$ में एक समान अभिसारी है। चूँकि

$$y_n=y_0+\sum_{r=1}^{n}(y_r-y_{r-1})$$

हमें प्राप्त होगा

$$|y_n|\leqslant|y_0|+\sum_{r-1}^{n}|y_r-y_{r-1}|$$

$$\leqslant|y_0|+\sum_{r=1}^{n}\frac{MN^{r-1}}{r!}\ |x-x_0|^r$$

$$\leqslant|y_0|+M/N\ \sum_{r=1}^{n}\ \frac{N^r l^r}{r!}\leqslant|y_0|+M/N(e^{Nl}-1)$$

अतः अंतराल $|x-x_0|\leqslant l$ में अनुक्रम $\{y_n(x)\}$ एक $y\ x)$ की एकसमान अभिसारी है। चूँकि प्रत्येक $y_n(x)$ एक अनिश्चित समाकल है, अतः संतत है, इसलिये $y(x)$ भी संतत है एवं $y(xo)=y_0)$

(iv) अब हम सिद्ध करेंगे कि $y(x)$ ही इच्छित हल है।

चूँकि

$$|f(x, y)-f(x, y_n)|\leqslant N|y-y_n|,$$

एवं $y_n \to y$ एक समान रूप से, अतः $|x-x_0| \leqslant l$ पर $f(x, y_n) \to f(x, y)$ एक समान रूप से तथा

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} \underset{n+1}{y(x)}=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x, y_n)dx$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(x, y_n)dx$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

(v) हल की अद्वितीयता (Uniqueness of the solution)

मान लो

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

एवं

$$z=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, z)dx$$

दो भिन्न संतत हल हैं जो कि दिये गये अवकल समीकरण को संतुष्ट करते हैं। मान लो कि

$$|x-x_0| \leqslant l \text{ पर } |y(x)-z(x)| \leqslant, N \text{ ; तब}$$

$$|y(x)-z(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} \{f(x, y)-f(x, z)\}dx|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y)-f(x, z)||dx|$$

$$\leqslant K\int_{x_0}^{x} |y-z||dx|$$

$$\leqslant KN|x-x_0|$$

अतः

$$|y(x)-z(x)| \leqslant K^2N\int_{x_0}^{x} |x-x_0|dx$$

$$\leqslant k^2N\left|\frac{x-x_0}{2\,!}\right|^2$$

उपरोक्त असमानता का पुनः उपयोग करके हमें प्राप्त होगा

$$|y(x)-z(x)|\leqslant K^{n}N \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

जहाँ $$|x-x_0|\leqslant l$$

अब चूँकि श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(kl)^n}{n!}$$

अभिसारी है, अतः

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(Kl)^n}{n!}\to 0$$

अतः

$y(x)=z(x)$, अर्थात् हल अद्वितीय है ।

प्रश्नावली 12

1. पिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन की विधि से $dy/dx=y$ जबकि $y=1$, $x=0$ को हल करो ।
2. निम्न प्रारम्भिक मान समस्या के लिये $dy/dx=x+y^2$, $y(0)D$ पिकार्ड की विधि से प्रथम तीन सन्निकटन y_1, y_2 एवं y_3 प्राप्त करो ।
3. दर्शाओ कि लिपशीज़ सांतत्य⟹सांतत्य, किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।
4. पिकार्ड विधि का उपयोग करके y का सन्निकट मान ज्ञात करो, जबकि $x=0.1$ $dy/dx=3x+y^2$, $y=1$ जब $x=0$
5. दर्शाओ कि यदि फलन f एवं g लिपशीज़ प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं, तो $f+g$ भी इसे संतुष्ट करेंगे, किंतु $f.g$ नहीं ।
6. दर्शाओ कि $f(x, y)=xy^2$, आयन R में $R: |x|\leqslant|, |y|\leqslant|$ लिपशीज़ प्रतिबन्ध संतुष्ट करता है, लेकिन पट्टी (strip)$|x|<|, |y|<\infty$ में नहीं करता ।

अध्याय 2

प्रथम कोटि के समीकरण, किन्तु प्रथम घात के नहीं

2.1 प्रथम कोटि के अवकल समीकरण का रूप

प्रथम कोटि के अवकलन समीकरण का रूप हैं

$$f(x, y, y^1)=0 \quad f(x, y, p)=0$$

जहां सुविधा के लिये $y^1=dy/dx$ की p से बदल दिया गया है। यदि p की घात एक से अधिक है जैसे कि $p^3-p(y+3)+x=0$ में समीकरण प्रथम कोटि एवं उच्चतर घात का है (यहाँ, तृतीय)

प्रथम कोटि एवं n घात के व्यापक समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$p^n+p_1 p^{n-1}+p_2 p^{n-2}+\ldots+P_{n-1} p^+ p_n=0 \qquad (1)$$

जहाँ $P_1, P_2, \ldots P_n$ सभी x एवं y के फलन हैं।

निम्नलिखित विधियों में से किसी एक (या ए : से अधिक) के द्वारा ऐसे समीकरणों का हल संभव है। प्रत्येक स्थिति में समीकरण को इस प्रकार समानयित किया जाता है कि प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के समीकरण (एक या अधिक) हल करना पड़े।

इस अध्याय में जिन हलनीय समीकरणों का हम अध्ययन करेंगे वे निम्न प्रकार के हैं—

(i) p के लिये हलनीय (solvable for p)

(ii) y के लिये हलनीय

(iii) x के लिये हलनीय

(iv) x-रहित/y-रहित

(v) x एवं y में समघात

(vi) क्लोरो समीकरण, $y=xp+f(p)$

(vii) लैगरैंज समीकरण $y=xg(p)+f(p)$

2.11 p के लिये हलनीय समीकरण

(i) इस स्थिति में समीकरण (1) के वाम पक्ष को, p में बहुपद मानते हुए, n वास्तविक रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है । अतः (1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है—

$$(p-F_1)(p-F_2)\ldots(p-F_n)=0 \tag{2}$$

जहाँ प्रत्येक F_i x एवं y के फलन हैं ।

समीकरण (1)y के उस मान से संतुष्ट होगा जो कि (2) के किसी भी गुणनखण्ड को शून्य कर दे । अतः (1) के हलों को ज्ञात करने के लिये (2) के प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर लिखो, एवं, इस प्रकार प्राप्त प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के n समीकरणों को हल करो ।

$$\frac{dy}{dx} F_1(x, y)\frac{dy}{dx}=F_2(x, y), \ldots, \frac{dy}{dx}=F_n(x, y)$$

मान लो इनके हल हैं

$$f_1(x, y, c_1)=0, f_2(x, y, c_2)=0 \ldots f_n(x, y, c_n)=0 \tag{2}$$

चूंकि $c_1, c_2, \ldots c_n$ समाकलन के स्वेच्छ अचर हैं, और समीकरण प्रथम कोटि का होने के कारण, केवल एक ही स्वेच्छ अचर को समाहित किया जा सकता है, अतः हम $c_1=c_2 \ldots c_n=c$ रखते हैं ।

तब (1) का पूर्वंग निम्न गुणनफल होगा—

$$f_1(x, y, c)\, f_2(x, y, c) \ldots f_n(x, y, c)=0$$

उदाहरण

$$xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^3+xy=0$$

या

$$(xp+x+y)\,(yp+x)=0$$

अर्थात्

$$xp+x+x=0$$

एवं

$$yp+xdx=0$$

या

$$(xdy+ydx)+xdx=0$$

एवं

$$ydy+xdx=0$$

इनका समाकलन करने पर

$$2xy+x^2-c=0 \qquad x^2+y^2-c=0$$

अतः समीकरण का पूर्वंग है

$$(2xy+x^2-c).(x^2+y^2-c)=0$$

(2) हल करो

$$p^2+2py\cot x-y^2=0$$

दिये हुए समीकरण को p के लिये हल करने पर

$$p=1/2\{-2y\cot x\pm\sqrt{(4y^2\cot^2 x+4y^2)}\}$$
$$=(-\cot x+\operatorname{cosec} x)y$$

या

$$\frac{dy}{dx}=(-\cot x+\operatorname{cosec} x)y \qquad \text{(i)}$$

एवं

$$\frac{dy}{dx}=-(\cot x+\operatorname{cosec} x)y \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) के चरों को पृथक करने पर

$$\int\frac{dy}{y}=\int(-\cot x+\operatorname{cosec} x)dx+\log c$$

या

$$\log y=-\log\sin x+\log\tan x/2+\log c$$

या

$$\log y=\log c\,\frac{\tan x/2}{\sin x}$$

या $$y \sin x = c \tan x/2$$
या
$$y \sin x - c \tan x/2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

इसी प्रकार समीकरण (*ii*) का हल

$$\log y = -(\log \tan x/2 + \log \sin x) + \log c$$
या
$$y \sin x \tan x/2 - c = 0 \qquad (iv)$$

अतः समीकरण का पूर्वंग (*iii*) एवं (*iv*) से प्राप्त होगा

$$(y \sin x - c \tan x/2)(y \sin x \tan x/2 - c) = 0$$

(3) हल करो
$$p^3 - p(x^2 + xy + y^2) = xy(x+y) = 0$$

यह सुगमता से देखा जा सकता है कि p के बराबर x या y या $-(x+y)$ रखने से समीकरण शून्य हो जाता है। अतः समीकरण के वाम पक्ष को गुणन-खण्डों में वियोजित करने पर

$$(p-x)(p-y)(p+x+y) = 0$$

अतः हमें प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के तीन समोकरण हल करना है, जो इस प्रकार है

$$p - x = 0 \qquad p - y = 0 \qquad p + x + y = 0$$
$$(i) \qquad\qquad (ii) \qquad\qquad (iii)$$

(i) का हल स्पष्ट है $\quad 2x + x^2 - c = 0$

(ii) का भी सुगमता से ज्ञात होगा $\quad y = ce^x = 0$

(iii) के लिये हमें $x + y = v$ प्रतिस्थापित करना होगा, तब $dv/dx = 1 = v$

समाकलन करने पर $-\log(1-v) = x - c_1$

या
$$1 - (x+y) = ce^{-x}$$
अर्थात्
$$1 - yx - ce^{-x} = 0$$

अतः दिये हुये समीकरण का पूर्वंग होगा

$$(2y - x^2 - c)(y - cc^x)(1 - x - y - ce^{-x}) = 0$$

प्रश्नावली 13

1. $xyp^2-(x^2+y^2)p+xy=0$
2. $p^3+2xp^2-y^2p^2-2xy^2p=0$
3. $p^2+px+py+xy=0$
4. $p^4-(x+2y+1)p^3+(x+2y+2xy)p^2-2xyp=0$
5. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-bx^3=0$
6. $p^2+p-2=0$
7. $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{dy}{dx}+(2y^2-x^2)=0$
8. $xp^2+(y-1-x^2)p-x(y-1)=0$

2.12 y के लिये हलनीय समीकरण

(ii) यदि अवकल समीकरण को y के लिये हल किया जा सकता है, तब वह निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$y=f(x, p) \tag{1}$$

समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}=F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

यह p एवं x में प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का समीकरण है। इसका हल प्राप्त करना सम्भव होना चाहिये। मान लो कि हल है

$$\phi\ (x, p, c)=0 \tag{2}$$

अब (1) और (2) की सहायता से p का विलोपन करने पर हमें समीकरण (1) का हल प्राप्त होगा। यदि विलोपन करना सम्भव नहीं है, तब यह माना जा सकता है कि समीकरण (1) और (2) से प्राचल p के पदों में x एवं y का मान ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण (1) हल करो

$$y=(2+p)x+p^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p=(2+p)+x\frac{dp}{dx}+2p\ \frac{dp}{dx}$$

या

$$-2=(x+2p)\frac{dp}{dx}$$

अर्थात्

$$\frac{dx}{dp}+\frac{x}{2}=-p$$

जो कि x व p में रैखिक समीकरण है ।

समाकलन गुणक है $e^{p/2}$ अत: इसका हल हैं

$$xe^{p/2}=\int(-p)\,.\,e^{p/2}dp+c$$

$$=-2pe^{p/2}+4e^{p/2}+c$$

$\therefore$ $$x=2(2-p)ce^{-p/2}$$

x का मान दिये हुये समीकरण में भरने पर

$$y=8-p^2+(2+p)ce^{-p/2}$$

अत: x एवं y दोनों को प्राचल p के पदों मे ज्ञात किया । यही समीकरण का हल है ।

(2) हल करो

$$y=2xp+x^2p^4$$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$p=2p+2xp^4+(2x+4x^2p^3)\frac{dp}{dx}$$

या

$$p(1+2xp^3)+2x(1+2xp^3)\frac{dp}{dx}=0$$

अर्थात्

$$(1+2xp^3)\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

यदि

$$1+2xp^3\neq0,$$

हमें प्राप्त होगा

$$p+2x\frac{dp}{dx}=0$$

या
$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{2x}$$

अत: समालकन करने पर
$$\log p=-1/2 \log x+c_1=\log\sqrt{(c/x)}$$
$$\therefore \quad p=\sqrt{(c/x)}$$

p का मान समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर
$$y=2\sqrt{(cx)}+c^2$$

अत: समीकरण का पूर्वग है
$$(y-c^2)^2=4cx$$

2.13 x के लिये हलनीय समीकरण

(iii) इस समीकरण का रूप होगा
$$x=f(y, p)$$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}=F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

जो कि प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का समीकरण है। अत: समीकरण
$$\frac{1}{p}=F\left(y, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

को हल करके हमें प्राप्त होगा
$$\phi(y, p, c)=0$$

अब दिये हुये समीकरण $x=f(y, p)$ एवं $\phi=(y, p, c)$ की सहायता से p का विलोपन करने पर हमें समीकरण का पूर्वग प्राप्त हो जायेगा। यदि विलोपन करना सम्भव न हो, तो, x एवं y को अलग अलग p के पदों में दर्शाया जा सकता है, यही समीकरण का हल होगा।

उदाहरण

(3) $y=3px+6p^2y^2$

x के लिये हल करने पर

$$3x = y/p - 6py^2$$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{3}{p} = \frac{1}{p} - 12py - \left(\frac{y}{p^2} + 6y^2\right)\frac{dp}{dy}$$

अर्थात्

$$2p\left(\frac{1}{p^2} + 6y\right) + y\left(\frac{1}{p^2} + 6y\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

या

$$\left(\frac{1}{p^2} + 6y\right)\left(2p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

अत: यदि

$$\frac{1}{p^2} + 6y \neq 0,\ 2p + y\frac{dp}{dy} = 0$$

इस समीकरण को हल करने पर प्राप्त होता है

$$\log y = \log \frac{c_1}{\sqrt{p}}$$

या $py^2 = c$ अत: दिये गये समीकरण में p का यह मान रखने पर प्राप्त होगा

$$y = 3x\frac{c}{y^2} + 6\frac{c^2}{y^2}$$

अत: हल है

$$y^3 = 3xc + 6c^2 = 3c(x + 2c)$$

(4) $x = py - p^2$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{p} = p + (y - 2p)\frac{dp}{dy}$$

p को स्वतन्त्र चर मानकर पुनर्विन्यास करने पर प्राप्त होगा

$$\left(p - \frac{1}{p}\right)\frac{dy}{dp} + y = 2p$$

या

$$\frac{dy}{dp} + \frac{p}{(p^2 - 1)}y = \frac{2p^2}{(p^2 - 1)}$$

यह प्रथम घात का रैखिक समीकरण है।

समाकलन गुणक है

$$e^{\int p/(p^2-1)\,dp}=\sqrt{(p^2-1)}$$

अतः इसका हल है

$$y\sqrt{(p^2-1)}=\int\frac{2p^2}{\sqrt{(p^2-1)}}\,dp+c$$

$$2=\int\sqrt{(p^2-1}dp+2\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2-1)}}+c$$

$$=p(p^2-1)+\cosh^{-1}p+c$$

अतः

$$y=p+\frac{c+\cosh^{-1}p}{\sqrt{(p^2-1)}} \qquad \text{(i)}$$

y का यह मान दिये गये समीकरण में रखने पर

$$x=p(c+\cosh^{-1}p)(p^2-1)^{-1/2} \qquad \text{(ii)}$$

(i) एवं (ii) से समीकरण का हल ज्ञात होता है।

प्रश्नावली 14

1. $y=2xp-p^3$
2. $p^2-py+x=0$
3. $x-yp=ap^2$
4. $x^2+p^2x=yp$
5. $y=\sin p-p\cos p$
6. $y=p^2x+p$
7. $p^3-2xyp+4y^2=0$
8. $y=2px+y^3p^3$
9. $y^2\log y=xyp+p^2$
10. $e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y}=0$
11. $xp^2-yp-y=0$
12. $xp^2-2yp+4x=0$

2.14 x-रहित/y-रहित समीकरण

(iv) (Equations that do not contain x or y)

जब समीकरण x से स्वतन्त्र है, तब उसका रूप होग।

$$f(y, p)=0$$

अब यदि यह p के लिये हलनीय है, तब हमें प्राप्त होगा

$$p=\frac{dy}{dx}=\phi(y)$$

जिसमें चर पृथक्करणीय है, अतः यह समकलनीय है। यदि यह समोकरण y के लिये हलनीय है, तब उसका रूप होगा

$$y=F(p),$$

जो कि §2.12 (ii) की स्थिति है।

जब समीकरण y रहित है तब उसका रूप होगा

$$f(x, p)=0$$

यदि यह p के लिये हलनीय है, तब हमें प्राप्त होगा

$$\frac{dy}{dx}=\phi\ (x),$$

जो कि स्पष्टतः समाकलनीय है।

यदि यह x के लिये हलनीय है, तब हमें प्राप्त होगा

$$x=F(p),$$

जो कि §2.13 (iii) की स्थिति है।

यह ध्यान रखना है कि जब अलकल समीकरण x-रहित या y-रहित है, तथा p के लिये हलनीय नहीं है, तब x या y के लिये हल करने के पश्चात् अवकलन हमेशा अनुपस्थित चर के सापेक्ष किया जायेगा।

उदाहरण (5) हल करो

$$p=\tan\left(x-\frac{p}{1+p^2}\right) \tag{i}$$

इस समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$$\tan^{-1} p = x - \frac{p}{1+p^2}$$

स्पष्टत: यह x के लिये हलनीय है । हमें प्राप्त होगा

$$x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}$$

अनुपस्थित चर, y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{p} = \left\{\frac{1}{1+p^2} + \frac{(1+p^2) - p.2p}{1+p^2)^2}\right\} \frac{dp}{dy}$$

अर्थात्

$$dy = \frac{2p}{(1+p^2)^2}\, dp$$

समाकलन करने पर

$$y = c - \frac{1}{1+p^2}$$

अर्थात्

$$(c-y)(1+p^2) = 1 \tag{ii}$$

दिये गये समीकरण (i) एवं उपरोक्त सम्बन्ध (ii) से ही हल प्राप्त होता है ।

(6) हल करो

$$y = \sin p - p \cos p \tag{iii}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$p = (\cos p - \cos p + p \sin p)\frac{dp}{dx}$$

अर्थात्

$$1 = \sin p \frac{dp}{dx}$$

इसका समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$x + c_1 = -\cos p$$

या

$$\cos p = c - x \tag{iv}$$

(iv) एवं समीकरण (iii) की सहायता से p का विलोपन करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$y = \sqrt{\{1-(c-x^2)\}} - (c-x) \cos^{-1}(c-x)$$

अथवा $$\cos\left[\left\{\frac{\sqrt{(1-c^2+2cx-x^2)}-y}{(c-x)}\right\}\right]=c-x$$

यही समीकरण का व्यापक हल है ।

2.15 (v) x एवं y में समघात समीकरण

जब समीकरण x एवं y में समघात (homogeneous) है, तब उसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}\right)=0$$

यदि इसे dy/dx के लिये हल करना सम्भव है, तब इसका रूप होगा

$$\frac{dy}{dx}=\phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

इसे अध्याय 1 के §1.22 समघात समीकरण की विधि से हल किया जा सकता है । यदि समीकरण y/x के लिये हल किया जा सकता हैं, तब हमें प्राप्त होगा

$$y=xf(p),$$

जोकि §2.21 (ii) की स्थिति के अन्तर्गत आता है ।

अत: उपरोक्त को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p=f(p)+xf'(p)\frac{dp}{dx}$$

पुनर्विन्यास करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{dx}{x}=\frac{f'(p)}{p-f(x)}dp$$

इसमें चर पृथक्करणीय हैं, अत: यह समकलनीय है ।

उदाहरण (7) हल करो

$$xyp^2+p(3x^2-2y^2)-6xy=0$$

यह 2 घात का समघात समीकरण है, p के लिये हल करने पर हमें प्राप्त होगा

$$p=\frac{-(3x^2-2y^2)\pm\sqrt{\{(3x^2-2y^2)^2+24x^2y^2\}}}{2xy}$$

$$=\frac{-3x^2+2y^2+(3x^2+2y^2)}{2xy}$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

और $\frac{-3x}{y}$ पुनर्विन्यास करने पर

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}$$

समाकलन करने पर

$$\log x-\log c=1/2 \log y$$

या

$$x/c=\sqrt{y},$$

अर्थात्

$$x^2-c^2y=0$$

p के दूसरे मान को लेने पर

$$-ydy=3xdx$$

समाकलन करने पर

$$-y^2=3x^2+c,$$

अर्थात्

$$3x^2+y^2+c=0$$

अतः समीकरण का सामान्य हल है

$$(x^2-c^2y)(3x^2+y^2+c)=0$$

(8) हल करो

$$y=yp^2+2px$$

अर्थात्

$$x=y\,\frac{(1-p^2)}{2p},$$

जो कि

$$x=yf(p)$$

प्रकार का है।

y के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{(1-p^2)}{2p}-\frac{y}{2}\left(\frac{1}{p^2}+1\right)\frac{dp}{dy}$$

अर्थात

$$\frac{1}{p}-\frac{(1-p^2)}{2p}=-\frac{y}{2}\frac{(1+p^2)}{p^2}-\frac{dp}{dy}$$

या

$$-\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p},$$

समाकलन करने पर

$$\log c - \log y = \log p$$

या $c = py$, p का मान दिये हुये समीकरण में रखने पर प्राप्त होगा

$$y^2 = 2cx + c^2$$

प्रश्नावली 15

निम्न समीकरणों को हल करो

1. $y = 2p + 3p^2$
2. $y - x = xp + p^2$
3. $x^2 = a^2(1 + p^2)$
4. $y^2 = b^2(1 + p^2)$
5. $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$
6. $y = px + m/p$
7. $x + \dfrac{p}{\sqrt{((1+p^2))}} = b$
8. $8yp^2 - 2xp + y = 0.$

2.15 क्लेरो समीकरण (Clairaut's equation)

हमने पिछले अनुच्छेद में x एवं y में समघात समीकरण का अध्ययन किया। जब ये समीकरण x एवं y में प्रथम घात के होते हैं, तब उनका निम्न रूप विशेष महत्व का होता है :

$$y = px + f(p)$$

जिसे क्लेरो समीकरण के नाम से जाना जाता है।

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$p = p + \{x + f'(p)\} \frac{dp}{dx}$$

अतः

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{या} \quad x + f'(p) = 0$$

पहिले विकल्प से प्राप्त होगा, $p = c$

p का मान समीकरण में रखने पर हल प्राप्त होगा :

$$y=cx+f(c)$$

दूसरा विकल्प है :

$$x+f'(x)=0$$

यदि हम उपरोक्त समीकरण तथा क्लेरो समीकरण से p का विलोपन करते हैं, तब जो हल प्राप्त होगा वह अचर रहित होगा, तथा वह हल $y=cx+f(c)$ का विशेष हल नहीं होगा। ऐसे हल को विचित्र हल (singular solution) कहते हैं। इसका अध्ययन अनुच्छेद § 2.23 में किया जायेगा।

कभी कभी किसी अवकल समीकरण को उचित प्रतिस्थापन द्वारा क्लेरो समीकरण के रूप नें समानीत किया जा सकता है ।

उदाहरण : हल करो :

$$(y-px)^2=1+p^2$$

अर्थात

$$y=px\pm\sqrt{(1+p^2)}$$

यहाँ

$$y=px+\sqrt{(1+p^2)}$$

क्लेरो* समीकरण है,

अतः उसका हल है

$$y=cx+\sqrt{(1+c^2)}$$

इसी प्रकार

$$y=px-\sqrt{(1+p^2)}$$

का हल होगा

$$y=cx-\sqrt{(1+c^2)}$$

अतः पूर्वग होगा

$$(y-cx-\sqrt{(1+c^2)})\,(y-cx+\sqrt{(1+c^2)})=0$$

या

$$(y-cx)^2=1+c^2$$

(2) हल करो :

$$\cos^2 y\,.\,p^2+\sin x\cos x\cos y\,.\,p=\sin y\cos^2 x$$

*अलेक्सी क्लाडे क्लेरो : सर्वप्रथम गणितज्ञ थे जिन्होंने अवकर समीकरण का हल प्राप्त करने के लिये उसका अवकलन करने की युक्ति प्रतिपादित की। जो समीकरण उनके नाम के साथ जुड़ा हुआ है, उसका प्रकाशन उन्होंने 1734 में किया। उनकी रुचि के दूसरे क्षेत्र थे—पृथ्वी की आकृति एवं चंद्र की गति।

रूपांतरण $u=\sin y$, $v=\sin x$ के द्वारा इस समीकरण को क्लेरो समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है :

$$\frac{du}{dv}=\frac{du/dx}{dv/dx}=\frac{\cos y}{\cos x}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{\cos x}p$$

अतः पूरे समीकरण में $\cos^2 x$ से भाग देने पर हमें प्राप्त होगा :

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2+v\frac{du}{dv}=u$$

जो कि $u=p'v+p'^2$ है, जहाँ $p'=du/dv$

अतः क्लेरो समीकरण से इसका हल है ।

$$u=cv+c^2$$

अर्थात

$$\sin y=c\sin x+c^2$$

(2) हल करो :

$$x^2(y-px)=yp^2$$

प्रतिस्थापन $x^2=u$, $y^2=v$ से हमें प्राप्त होगा ।

$$2x=\frac{du}{dx},\ 2y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

अतः

$$\frac{dv}{du}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

समीकरण में $x=dy/dx$ का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होगा :

$$x^2\left(y-\frac{x^2}{y}\frac{dv}{du}\right)=y\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

अतः सरल करने पर ;

$$v-u\frac{dv}{du}=\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

अर्थात

$$v=\frac{dv}{du}u+\left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

जो क्लेरो समीकरण का रूप है, अतः इसका हल होगा :

$$v=cu+c^2$$

अर्थात

$$y^2=cx^2+c^2$$

2.17 लैंगरेंज समीकरण (Lagrange's Equation)

(vii) इसका व्यापक रूप है :

$$y=xg(p)+f(p)$$

जहां $g(p)$ एवं $f(p)$ p के फलन हैं । यदि $g(p)=p$, तब यह क्लेरो समीकरण हो जायेगा । § 2.12 के समान x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$p=g(p)+\{xg'(p)+f'(p)\}\frac{dp}{dx}$$

अतः

$$\frac{dx}{dp}=\frac{g'(p)}{p-g(p)}x+\frac{f'(p)}{p-g(p)}$$

उपरोक्त समीकरण परतंत्र चर x में रैखिक है ।

उदाहरण : 4 हल करो :

$$y=2xp-p^3$$

यह लैगरेंज समीकरण है । अतः x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$p=2p+(2x-3p^2)\frac{dp}{dx}$$

अर्थात

$$-p\frac{dx}{dp}=2x-3p^2$$

या

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=3p$$

जो कि रैखिक है, समाकलन गुणक है ।

$$e^{\int 2/p\, dp}=p^2$$

अतः हल है

$$xp^2=\int 3p^3dp=\frac{3}{4}p^4+c$$

अर्थात

$$x=\frac{c}{p^2}+\frac{3}{4}p^2$$

एवं

$$y=2xp-p^3$$

इन दोनों में से p का विलोपन फल (eliminant) ही अभीष्ट व्यापक हल है ।

5. हल करो :

$$y=2px+p^2y$$

दोनों पक्षों में y से गुणा करने पर प्राप्त होगा :

$$y^2=2pyx+p^2y^2$$

यदि

$$y^2=v, \quad 2y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx},$$

तब

$$v=\frac{dv}{dx}x+\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

यह परतंत्र चर v में क्लेरो समीकरण है, अतः इसका हल होगा :

$$v=dx+\tfrac{1}{4}d^2,$$

मान लो $\qquad d/2=c$

तब $\qquad y^2=2cx+c^2$

टिप्पणी : इसी समीकरण को अनुच्छेद 2, 15 के उदाहरण 8 में $x=yf(p)$ प्रकार का मानकर हल किया गया है।

प्रश्नावली 16

हल करो :

1. $y=xp+\cos^{-1} p$
2. $(y-px)(p+1)=p$
3. $y=(1+p)x+p^2$
4. $y=3px+6y^2p^2$

   (संकेत : समीकरण में y^2 का गुणा करें, तथा $y^3=v$ रखें)
5. $(px-y)(py+x)=h^2p$

   (संकेत : $x^2=u$, $y^2=v$ रखें)
6. $p^2x(x-2)+p(2y-2xy-x+2)+y^2+y=0$

   (संकेत : गुणनखंड ज्ञात कीजिये)
7. $y=2xp+y^2p^3$

8. $e^{4x}(p-1)+e^{2y}p^2=0$

(संकेत : $e^{2x}=u$, $e^{2y}=v$ रखें)

9. $p=\log(px-y)$

10. $\sin px \cos y=\cos px \sin y+p$

विविध प्रश्नावली 17

हल करो :

1. $y=2px+p^4x^2$

2. $y=(2+p)x+p^2$

3. $p^2(x^2-a^2)=2pxy-y^2+b^2$

4. $bxyp^2+(x^2-by^2-a)p-xy=0$

(संकेत $x^2=u$, $y^2=v$ रखें)

5. $(x-a)p^2+(x-y)p-y=0$

6. $y=p\sin p+\cos p$

7. $p^3+p=e^y$

8. $x^2(y-px)=x^2y$

9. $y=2px+xp^2$

10. $x(y^2-1)=py(1+x^2)$

11. $\dfrac{dy}{dx}+2xy=x^2+y^2$

12. $y=p^2y+2px$

13. $16y^3p^2-4xp+y=0$

14. $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2xy\dfrac{dy}{dx}+2y^2-x^2=0$

15. $y^2(1-p^2)=a$

16. $e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y}=0$

17. $(xp-y)^2/(1+p^2)=a^2$

18. $x = y + a \log p$

19. $y - (1+p^2)^{-1/2} = b$

20. $y = 2px + f(xp^2)$.

2.21 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण का ज्यामितीय अर्थ

समीकरण का ज्यामितीय अर्थ :

मान लो :
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

एक समीकरण है जो dy/dx में प्रथम घात का है। हमें ज्ञात है कि जब किसी वक्र का समीकरण समकोणिक निर्देशांकों में दिया हो, तब किसी विन्दु पर उसकी दिशा का स्पर्शज्या (tangent) dy/dx होता है। अतः किसी विन्दु (x_1, y_1) पर dy/dx का मान होगा, मान लो m_1, जो कि समीकरण (1) से दिया जायेगा। एक बिंन्दु जो समीकरण (1) के प्रतिबन्ध के अनुसार गतिमान होता है, (x_1, y_1) बिन्दु से गुजरने पर m_1 की दिशा में जायेगा। इस दिशा में अनन्त सूक्ष्म दूरी चलने पर मान लो वह बिन्दु (x_2, y_2) पर पहुँचता है। मान लो (x_2, y_2) पर समीकरण (1) द्वारा दी गई दिशा m_2 है, तब बिन्दु (x_2, y_2) से m_2 दिशा में अनन्त सूक्ष्म दूरी चलने पर (x_3, y_3) पर पहुँचेगा, और इसी प्रकार अगले बिन्दु (x_4, y_4) पर पहुंचेगा, इसी क्रम से उत्तरोत्तर बिन्दुओं से गुजरेगा। इस प्रकार गतिमान होकर बिन्दु एक वक्र बनायेगा जिसके प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक व उसकी संगत स्पर्शी की दिशा समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। यदि गतिमान बिन्दु किसी दूसरे बिन्दु से गति प्रारम्भ करता है, जो कि पहिले निर्मित वक्र पर नहीं है, तब वह एक दूसरा वक्र बनायेगा जिसके प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक तथा उस पर स्पर्शी की आनति समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। इस प्रकार तल के प्रत्येक बिन्दु से एक विशेष वक्र गुजरेगा जिससे प्रत्येक बिन्दु पर $x, y, dy/dx$ समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगें। अतः प्रत्येक वक्र का समीकरण अवकल समीकरण का एक विशेष हल। ऐसे वक्रों के कुल का समीकरण ही व्यापक हल है।

हमें ज्ञात है कि अवकल समीकरण (1) के हल का रूप है।

$$F(x, y, c) = 0,$$

जहाँ c स्वेच्छ अचर है। इससे भी पुष्टि होती है कि अवकल समीकरण वक्रों के एक c कुल को निरूपित करता है। चूंकि प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के

व्यापक हल में एक ही स्वेच्छ अचर होता है, अतः इसका बिन्दुपथ वक्रों के एकल अनन्त द्वारा निर्मित होता है।

उदाहरण : समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

दर्शाता है कि इस समीकरण को संतुष्ट करने वाला गतिमान बिन्दु, उसको मूल बिन्दु से जोड़ने वाली रेखा के लम्ब रूप गति करता है, अर्थात वह मूल बिन्दु को केन्द्र मानकर एक वृत्त का निर्माण करता है।

समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$$xdx + ydy = 0,$$

उसका व्यापक हल होगा

$$x^2 + y^2 = c,$$

किसी विशेष बिन्दु, मान लो (1, 2) से गुजरने वाला वृत्त है।

$$x^2 + y^2 = 5,$$

जो कि एक विशेष हल है, अतः व्यापक हल है उन सभी वृत्तों का कुल जिनका केन्द्र मूल बिन्दु पर है, इनमें से प्रत्येक वृत्त का समीकरण एक विशेष हल है।

(ii) प्रथम कोटि किन्तु द्वितीय घात का अवकल समीकरण

ऐसा समीकरण dy/dx में द्विघाती होता है, अतः प्रत्येक बिन्दु पर dy/dx के दो मान प्राप्त होते हैं। अतः प्रत्येक बिन्दु से उसके द्वारा निरूपित वक्रों के कुल के दो घटक गुजरते हैं। परिणामतः हम ऐसा अनुमान लगाते हैं कि इसके हल में स्वेच्छ अचर c भी द्वितीय घात में होगा, अर्थात् प्रत्येक बिन्दु के संगत c के दो मान रहेंगे। हमें अध्याय से यह तथ्य पहिले ही ज्ञात है।

उदाहरण : समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

का हल है $y = mx + c$,

जहाँ m एवं c स्वेच्छ हैं। किसी बिन्दु $(0, c)$ से किसी दिशा m में खींची गई रेखा समीकरण के विशेष हल का बिन्दु पथ है। c का कोई भी विशेष मान, मान लो c_1, लेने पर स्वेच्छ m के अनन्त मानों के संगत अनन्त रेखायें प्राप्त की

जा सकती हैं जो सभी समीकरण के हल में अन्तर्विष्ट होंगी। चूँकि c के मान भी अनन्त हो सकते हैं एवं प्रत्येक c के संगत अनन्त रेखायें प्राप्त की जा सकती हैं, अतः सम्पूर्ण समाकल सरल रेखाओं के दुहरे अनन्त कुल को निरूपित करेगा।

2.22 विविक्तिकर (Discriminant)

किसी एक चर में दिये गये द्विघात समीकरण का विविक्तिकर उसके गुणांकों का वह फलन है जिसको शून्य के बराबर करने से हमें प्रतिबन्ध ज्ञात होता है कि समीकरण के दोनों मूल बराबर हों।

उदाहरणार्थ : समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं

$$\frac{1}{2a}\{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\}$$

अतः प्रतिबन्ध कि समीकरण के दोनों मूल बराबर हों $b^2-4ac=0$, होगा। यहाँ विविक्तिकर है b^2-4ac, समीकरण $b^2-4ac=0$, को हम विविक्तिकर सम्बन्ध (discriminant relation) कहेंगे।

अब $\phi(x, y, c)=0$, को हम c में एक समीकरण के रूप में मान सकते हैं, जिसके गुणांक x एवं y के फलन हैं। ϕ का c—विविक्तिकर x एवं y का वह फलन है जिसको शून्य के बराबर करने से हमें प्रतिबन्ध ज्ञात होगा कि समीकरण $\phi(x, y, c)=0$, के c के लिए मूल बराबर हों। इसको ज्ञात करने की विधि है : निम्न समीकरणों की सहायता से c का विलोपन करो

$$\phi(x, y, c)=0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial c}=0$$

विलोपन फल (eliminant) ही ϕ का c—विविक्तिकर होगा।

इसी प्रकार $f(x, y, p)=0$ का p-विविक्तिकर निम्न समीकरणों से p का विलोपन करने पर प्राप्त होगा :

$$f(x, y, p)=0 \text{ एवं } \frac{\partial}{\partial p}=0$$

p-विविक्तिकर सम्बन्ध वह बिंदुपथ दर्शाता है, जिसके प्रत्येक बिंदु पर $f(x, y, p)=0$ के p के मान बराबर है।

अन्वालोप (Envelope)

मान लो $$\phi(x, y, c)=0 \qquad (1)$$

वक्रों के एक कुल का समीकरण है, जहाँ प्राचल c है। c के भिन्न-भिन्न मान लेने पर हमें कुल के भिन्न-भिन्न वक्र प्राप्त होते हैं। तब इस कुल का अन्वालोप वह वक्र है, जो कि कुल (1) के प्रत्येक वक्र को स्पर्श करता है एवं उसके प्रत्येक बिंदु पर कुल के किसी वक्र के द्वारा स्पर्श किया जाता है।

समीकरण (1) एवं $\partial\phi/\partial c=0$ की सहायता से c का विलोपन करने पर हमें (1) के अन्वालोप का समीकरण प्राप्त होगा। अतः (1) का c-विविक्तिकर सम्बन्ध ही उसका अन्वालोप है।

उदाहरण : $$y=mx+a/m \qquad (2)$$

प्राचल m में सरल रेखाओं के कुल को दर्शाता है, अतः m के प्रत्येक मान के संगत एक सरल रेखा प्राप्त होगी।

$$\frac{\partial y}{\partial m}=x-a/m^2=0 \qquad (3)$$

अतः (2) एवं (3) की सहायता से m का विलोपन करने पर हमें कुल (2) का अन्वालोप प्राप्त होगा। चूँकि (3) से $m=\sqrt{(a/x)}$, यह मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर $y=2\sqrt{(ax)}$, अतः अन्वालोप है।

परवलय $y^2=4ax$

यह आसानी से देखा जा सकता है कि (2) m में द्विघात समीकरण है तथा $y^2-4ax=0$, उसका m विविक्तिकर सम्बन्ध है।

2.23 विचित्र हल (Singular Solution)

हमें ज्ञात है कि अवकल समीकरण

$$y=px+a/p$$

एक क्लेरो समीकरण है, अतः उसका हल है

$$y=mx+a/m,$$

जहाँ स्वेच्छ अचर को हमने c के बदले m लिखा है। पिछले अनुच्छेद के उदाहरण में हमने देखा है कि उपरोक्त सरल रेखाओं के कुल का अन्वालोप है। परवलय

$$y^2=4ax \qquad (3)$$

अन्वालोप होने के कारण परवलय (3) प्रत्येक सरल रेखा को स्पर्श करता है और प्रत्येक बिंदु पर किसी सरल रेखा द्वारा स्पर्श किया जाता है। किसी भी बिंदु (X_0, Y_0) पर, जो कि परवलय एवं सरल रेखा $y=m_0x+a/m_0$, (m_0 प्राचल m का विशेष मान है) का स्पर्श बिंदु है X_0, Y_0 ऐवं $m=dy/dx$ के मान सरल रेखा एवं परवलय के लिए एक से है। स्पष्ट है कि यह परवलय भी अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करेगा; अतः यह भी समीकरण का एक हल है। चूँकि यह व्यापक हल का विशेष मान नहीं है, इसे विचित्र हल कहते हैं।

अब हम व्यापक रूप से विचित्र हल की चर्चा करेंगे।

जब किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल को निरूपित करने वाले वक्रों के कुल के अन्वालोप का अस्तित्व होता है, इस अन्वालोप का समीकरण भी अवकल समीकरण का हल होता है, इसे विचित्र हल कहते हैं। इस विचित्र हल में कोई स्वेच्छ अचर नहीं होता, तथा सामान्यतः यह व्यापक हल में अन्तर्विष्ट नहीं होता है अर्थात् व्यापक हल में अचर C का कोई विशेष मान रखने से इसे प्राप्त नहीं किया जा सकता।

2.24 क्लेरो समीकरण का विचित्र हल

हमें ज्ञात है कि क्लेरो समीकरण

$$y=px+f(p) \tag{1}$$

का व्यापक हल है

$$y=cx+f(c) \tag{2}$$

अब (2) को c के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$0=x+f'(c) \tag{3}$$

अतः (2) एवं (3) की सहायता से c का विलोपन करने पर हमें क्लेरो समीकरण का विचित्र हल प्राप्त होगा। समीकरण (1) को p के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा।

$$0=x+f'(p) \tag{4}$$

समीकरण (1) और (4) तथा समीकरण (2) और (3) में मात्र इतना अन्तर है कि c के स्थान पर उनमें p है। अतः (1) और (4) की सहायता से p को विलोपित करने का परिणाम वही होगा जो कि (2) और (3) की सहायता से c के विलोपन से प्राप्त होगा। अतः (1) और (4) का p-विलोपन फल ही (2)

का अन्वालोप होगा, तथा वही (1) का विचित्र हल होगा। परिणामतः (1) का विचित्र हल (1) का p-विविक्तिकर सम्बन्ध है या व्यापक हल (2) का c-विविक्त-कर सम्बन्ध है।

टिप्पणी : क्लेरो समीकरण का p-विविक्तिकर सम्बन्ध एवं उसके व्यापक हल का c-विविक्तिकर सम्बन्ध तुल्य रहेंगे, अतः दोनों का उभयनिष्ठ मान ही विचित्र हल होगा। ध्यान रहे कि व्यापक स्थिति में p-विविक्तिकर एवं c-विविक्तिकर पूर्णरूपेण तुल्य नहीं होते हैं।

2.25 विचित्र हल ज्ञात करना

व्यापक स्थिति

मान लो
$$f(x, y, p)=0 \tag{1}$$

अवकल समीकरण है, जिसका व्यापक हल है
$$F(x, y, c)=0 \tag{2}$$

(2) को प्राचल c के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा—
$$\frac{\partial F}{\partial c}=0 \tag{3}$$

(1) को p के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर
$$\frac{\partial f}{\partial p}=0 \tag{4}$$

(1) का विचित्र हल हमें दो प्रकार से ज्ञात हो सकता है—

प्रथम विधि : (2) एवं (3) की सहायता से c का विलोपन करने पर प्राप्त विलोपन फल (Eliminant) ही (1) का विचित्र हल होगा, यदि वह (1) को संतुष्ट करता हो।

द्वितीय विधि : (1) एवं (4) की सहायता से p का विलोपन करने पर हमें X एवं Y में एक संबंध प्राप्त होगा। यदि यह संबंध समीकरण (1) को संतुष्ट करता है, तब वह विचित्र हल होगा।

टिप्पणी : (i) p एवं c-विविक्तिकर संबंध में अन्वालोप के अतिरिक्त अन्य बिंदुपथ भी अंतर्विष्ट हो सकते हैं—अर्थात् उनमें विचित्र हल के अतिरिक्त दूसरे

समीकरण भी हो सकते हैं । अतः इन संबंधों का वह उभयनिष्ठ भाग जो अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है, विचित्र हल होगा ।

(ii) यह स्पष्ट है कि यदि अवकल समीकरण p में केवल प्रथम घात का है, तब विचित्र हल का अस्तित्व नहीं है । इसी प्रकार यदि अवकल समीकरण के p में रैखिक गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है, तब किसी विचित्र हल का अस्तित्व नहीं होगा ।

कार्यकारी नियम

(2) एवं (3) की सहायता से c का विलोपन कर c-विविक्तिकर ज्ञात कीजिये । इसी प्रकार (1) एवं (4) की सहायता से p-विविक्तिकर ज्ञात कीजिये । मान लो c-विविक्तिकर एवं p-विविक्तिकर दोनों में अनावर्त (non-repeated) उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $E(x, y)$ है; यदि $E(x, y)=0$, अवकल समीकरण (1) को संतुष्ट करता है, तब यही (1) का विचित्र हल होगा ।

उदाहरण

(1) निम्न समीकरण का पूर्वग एवं विचित्र हल ज्ञात करो :

$$y=x\frac{dy}{dx}+a\sqrt{(1+(dy/dx)^2)}$$

यह क्लेरो समीकरण है, अतः इसका व्यापक हल है—

$$y=cx+a\sqrt{(1+c^2)}$$

इसका परिमेयकरण करने पर प्राप्त होगा

$$(y-cx)^2=a^2(1+c^2)$$

अर्थात्

$$(a^2-x^2)\,c^2+2xyc+a^2-y^2=0,$$

जो कि c में द्विघाती समीकरण है । अतः इसका c-विविक्तिकर संबंध होगा

$$4x^2y^2=4(a^2-x^2)\,(a^2-y^2)$$

सरल करने पर प्राप्त होगा—

$$x^2+y^2=a^2$$

चूँकि यह संबंध अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है, अतः यह विचित्र हल है ।

टिप्पणी : इस उदाहरण में सामान्य समाकल है

$$y = cx + a\sqrt{(1+c^2)}$$

जो कि सरल रेखाओं के कुल को निरूपित करता है। इनका अन्वालोप है वृत्त

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

हमें निर्देशांक ज्यामिति से ज्ञात है कि उपरोक्त सरल रेखा c के प्रत्येक मान के लिये, वृत्त को स्पर्श करती है।

2. समीकरण

$$4xp^2 = (3x-1)^2 \tag{i}$$

को हल करो एवं विचित्र हल के लिये परीक्षण करो—

p के लिए हल करने पर प्राप्त होगा

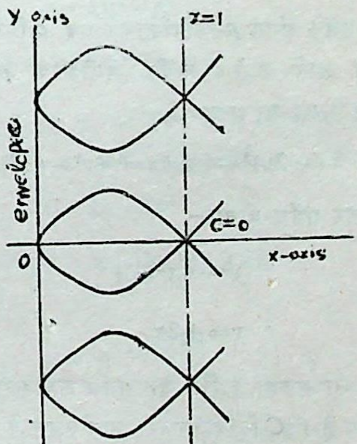
$$p = \pm\left(\frac{3}{2}\ x^{1/2} - \frac{1}{2}\ x^{-1/2}\right)$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगी—

$$y = \pm(x^{3/2} - x^{1/2}) + c_1,$$

अर्थात्

$$(y+c)^2 = x(x-1)^2 \tag{ii}$$



व्यापक हल (ii) का C-विविक्तिकर संबंध है

$$X(x-1)^2=0$$

समीकरण (i) का p-विविक्तिकर संबंध है

$$x(3x-1)^2=0$$

गुणनखण्ड $x=0$, दोनों संबंधों में उभयनिष्ठ है, तथा अवकल समीकरण (i) को संतुष्ट भी करता है, अर्थात्

$$x=0, \frac{dx}{dy}=0$$

समीकरण को संतुष्ट करेगा जबकि उसे

$$4x=(3x-1)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2,$$

रूप में लिखा जाये। अतः $x=0$ ही विचित्र हल है।

टिप्पणी : समीकरण का पूर्वांग त्रिघात वक्रों (cubics) का एक कुल निरूपित करता है, जो कि त्रिघात $y^2=x(x-1)^2$ को y-अक्ष के अनु सरकाने से प्राप्त होते हैं। ये त्रिघात y-अक्ष को स्पर्श करते हैं।

(3) समीकरण

$$xp^2-2yp+4x=0,$$

के लिये दर्शाओ कि इसके संगत p-विविक्तिकर एवं c-विविक्तिकर तुल्य हैं, अतः इसका विचित्र हल ज्ञात करो। चूंकि समीकरण p में द्विघाती है, अतः p-विविक्तिकर तुरंत लिखा जा सकता है—

$$(-2y)^2-4.x.4x=4(y^2-4x^2)$$

इसलिये p-विविक्तिकर संबंध होगा—

$$y^2-4x^2=0$$

अर्थात्

$$y=\pm 2x$$

यह आसानी से देखा जा सकता है कि यह संबंध समीकरण को संतुष्ट करता है, अतः यही विचित्र हल है। C-विविक्तिकर ज्ञात करने के लिये पहिले समीकरण को हल करना होगा। समीकरण y के लिये हलनीय है :

$$y=\frac{xp}{2}+\frac{2x}{p}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p=\frac{p}{2}+\frac{2}{p}+\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

हल करने पर

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$x=c_1 p$$

अतः p का मान समीकरण में रखने पर

$$y=x^2/2c_1+2c_1, \quad 2c_1=c$$

रखने पर समाकल होगा—

$$cy=x^2+c^2$$

अतः c-विविक्तिकर संबंध है

$$y^2-4x^2=0$$

चूँकि p एवं c-विविक्तिकर तुल्य है, $y=\pm 2x$ ही विचित्र हल है।

(4) लैगरेंज समीकरण

$$y=2xp-p^3 \tag{1}$$

को हल करो एवं विचित्र हल के लिये परीक्षण करो।

इसका व्यापक हल अनुच्छेद 2.17 के उदाहरण 4 में निकाला गया है। विचित्र हल ज्ञात करने के लिये हम (1) का p के सापेक्ष आंशिक अवकलन करते हैं

$$0=2x-3p^2 \tag{2}$$

(1) एवं (2) की सहायता से हम p का विलोपन करेंगे

(2) से

$$p=\pm\sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

अतः

$$y=p\,(2x-p)=\pm\sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)}\left(\frac{4x}{3}\right)$$

वर्ग करने पर $27y^2=32x^3$ यह p-विविक्तिकर संबंध है, किन्तु यह संबंध समीकरण (1) को संतुष्ट नहीं करता। अतः इस समीकरण का कोई विचित्र हल नहीं है।

(5) $$(px-y)(x-py)=2p$$

को हल करो एवं विचित्र हल ज्ञात करो। हम

$$x^2=u, \quad y^2=v$$

प्रतिस्थापन करेंगे

$$2x=\frac{du}{dx}, \quad 2yp=\frac{dv}{dx}$$

अतः

$$\frac{dv}{du}=\frac{dv/dx}{du/dx}=\frac{y}{x}\,p; \quad \frac{dv}{du}=p'$$

रखने पर

$$\left(\frac{x^2}{y}p'-y\right)(x-xp')=2xp'/y$$

अर्थात्

$$(up'-v)(1-p')=2p'$$

या

$$v=p'u+\frac{2p'}{p'-1}$$

अतः क्लेरो रूप का हल है

$$v=cu+\frac{2c}{c-1}$$

अतः हल है

$$y^2=cx^2+\frac{2c}{c-1}$$

अर्थात्

$$\frac{y^2}{2c/(c-1)}-\frac{x^2}{2/(c-1)}=1$$

जो कि शंकु काट (conic section) है।

सरल करने पर यह व्यापक हल निम्न रूप में लिखा जायेगा :

$$x^2c^2-(x^2+y^2-2)\,c+y^2=0$$

अतः c-विविक्तिकर संबंध होगा

$$(x^2+y^2-2)^2=4\,x^2y^2 \tag{1}$$

समीकरण का p के द्विपद के रूप में पुनर्विन्यास करने पर हमें प्राप्त होता है

$$xyp^2-(x^2+y^2-2)\,p+xy=0$$

अतः p-विविक्तिकर संबंध होगा—

$$(x^2+y^2-2)^2=4\,x^2y^2 \qquad (2)$$

चूँकि (1) और (2) तुल्य हैं, तथा यह भी देखा जा सकता है कि संबंध (1) समीकरण को संतुष्ट करता है, अतः यही विचित्र हल है।

$$(x^2+y^2-2)^2-4\,x^2y^2=0$$

$$(x^2+y^2-2+2\,xy)\,(x^2+y^2-2-2xy)=0$$

$$\{(x+y)^2-2\}\,\{(x-y)^2-2\}=0$$

अर्थात् विचित्र हल है—

$$(x+y+\sqrt{2})\,(x+y-\sqrt{2})\,(x-y+\sqrt{2})\,(x-y-\sqrt{2})=0$$

प्रश्नावली 18

निम्न समीकरणों को हल कीजिये एवं विचित्र हल (यदि हों) ज्ञात कीजिये—

1. $y=px-p^2$
2. $y=2xp-yp^2$
3. $p^2(2-3y)^2=4(1-y)$
   (संकेत : y को स्वतंत्र चर मानकर हल करें)
4. $y=px+p^3$
5. $y=2xp+p^2$
6. $y=px+\sqrt{((b^2+a^2p^2))}$
7. $3y=2px-2\,.\,p^2/x$
8. $xp^2=(x-a)^2$
9. $(y-px)^2\,(1+p^2)=b^2p^2$
10. $x^3p^2+x^2yp+1=0$
11. $y=2xp-p^3$

12. $(y-px)^2+a^2p=0.$

2.3 वक्रों का कुल (Family of curves)

प्रथम अध्याय में हमने देखा है कि किसी दिये हुए बक्रों के कुल

$$\phi(x, y, c)=0 \tag{1}$$

का संगत अवकल समीकरण

$$f(x, y, p)=0 \tag{2}$$

किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। अवकल समीकरण विश्लेषिक विधि से ऐसा गुणधर्म दर्शाता है जिसे वक्र कुल का प्रत्येक घटक सन्तुष्ट करता है।

विलोमतः यदि वक्र का ऐसा गुणधर्म दिया है, जिसे दर्शाने के लिए अवकलज को सम्बद्ध करना पड़े तब उस परिणामी अवकल समीकरण के व्यापक हल के द्वारा उस वक्र कुल को ज्ञात किया जा सकता है। उस कुल का प्रत्येक वक्र समीकरण (2) का समाकल वक्र (Integral Curve) कहलाता है। सुविधा के लिये वक्रों के कुछ गुणधर्म निम्नांकित हैं, जो कि अवकलज से सम्बन्धित हैं।

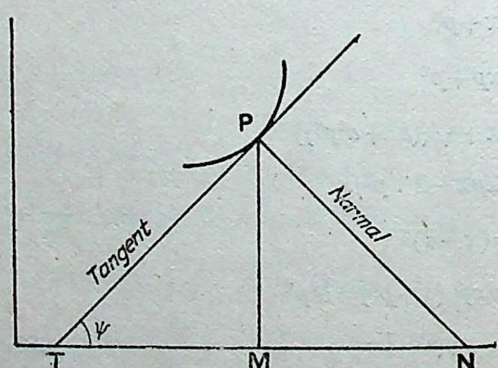
(a) $\dfrac{dy}{dx}=\tan\psi$

(b) $x-y\dfrac{dx}{dy}$,

x-अक्ष पर स्पर्शी का अंतः खण्ड है।

(c) $y-x\dfrac{dy}{dx}$

y-अक्ष पर स्पर्शी का अन्तः खण्ड है।



(d) $y\frac{dx}{dy}$,

अध: स्पर्शी (subtangent), TM, की लम्बाई

(e) $y\frac{dy}{dx}$

अधोलम्ब (subnormal), MN, की लम्बाई

(f) $y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}$

(x, y) एवं x-अक्ष के बीच स्पर्शी की लम्बाई, PT

(g) $x\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$

(x, y) एवं y-अक्ष के बीच स्पर्शी की लम्बाई PT

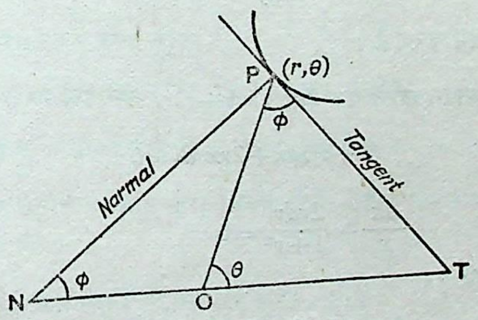
(h) $\tan\phi=\gamma\frac{d\theta}{dr}$

(i) $\gamma\tan\phi=\gamma^2\frac{d\theta}{dr}$

यह ध्रुवीय अध: स्पर्शी, OT की लम्बाई

(j) $\gamma\cot\phi=\frac{dr}{d\theta}$

(u) ध्रुवीय अधोलम्ब, ON की लम्बाई



उदाहरण 1

1. उस वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर खींचा गया अभिलम्ब मूलबिंदु से गुजरता हो ।

हल : किसी बिन्दु (x, y) पर अभिलम्ब का समीकरण है

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x),$$

जहाँ X, Y चलित निर्देशांक (current coordinates) हैं चूँकि अभिलम्ब मूल-बिन्दु से गुजरता है, अतः $X=Y=0$ इसे संतुष्ट करेगा । अतः

$$-y=-\frac{dx}{dy}(-x)$$

या $$xdx+ydy=0$$

समाकलन करने पर $x^2+y^2=c$ जो कि वृत्त है ।

(2) वक्रों के उस कुल का समीकरण ज्ञात करो जिसके लिये बिन्दु (x, y) एवं y अक्ष के बीच की स्पर्शी की लम्बाई स्पर्शी के y-अन्तःखण्ड के बराबर है ।

हल : प्रश्नानुसार

$$x\sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}=y-x\frac{dy}{dx}$$

वर्ग करने पर

$$x^2=y^2-2xy\frac{dy}{dx}$$

अर्थात्

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

जो समघात समीकरण है ।

$y=vx$ प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होगा—

$$(1+v^2)dx+2vx\ dv=0$$

या

$$\frac{dx}{x}+\frac{2vdv}{1+v^2}=0$$

समाकलन करने पर

$$\log x+\log(1+v^2)=\log c$$

सरल करने पर

$$x^2+y^2=cx$$

यही कुल का अभीष्ट समीकरण है ।

(3) वक्रों के उस कुल का समीकरण ज्ञात करो जिसके लिये स्पर्श बिन्दु एवं x अक्ष के बीच स्पर्शी की लम्बाई अचर राशि k के बराबर है।

हल : प्रश्नानुसार

$$y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}=k$$

वर्ग करने पर

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{K^2}{Y^2}$$

अत:

$$\frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{\left(\frac{k^2-y^2}{y^2}\right)}$$

समाकलन करने पर

$$c\pm x=\int\frac{\sqrt{(k^2-y^2)}}{y}dy$$

$y=k\sin\theta$, $\quad dy=K\cos\theta d\theta$ रखने पर

$$C\pm X=K\int\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$=K\int\operatorname{cosec}\theta d\theta-K\int\sin\theta d\theta$$

$$=K\log\tan\theta/2+K\cos\theta$$

θ का मान y में रखने पर प्राप्त होगा

$$c\pm x=k\log\tan\left(1/2\sin^{-1}y/k\right)+\sqrt{(k^2-y^2)}$$

यही वक्रों के कुल का समीकरण है, कुल का प्राचल c है।

(4) उस वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसके लिये ध्रुवीय अध:स्पर्शी एवं ध्रुवीय अधोलम्ब बराबर हों।

हल : ध्रुवीय अध:स्पर्शी की लम्बाई है $r^2\, d\theta/dr$

ध्रुवीय अधोलम्ब की लम्बाई है $dr/d\theta$—

प्रश्नानुसार

$$r^2\frac{d\theta}{dr}=\frac{dr}{d\theta}$$

अर्थात्

$$r^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

या

$$r=\frac{dr}{d\theta}$$

अर्थात्

$$\int\frac{dr}{r}=\theta+c_1$$

या

$$\log \gamma=\theta+c$$

अतः वक्र का समीकरण $\gamma=ce^{\theta}$

2.31 लम्बकोणीय संछेदी (Orthogonal trajectory)

वक्रों के किसी कुल की संछेदी वह वक्र है जो कि कुल के प्रत्येक घटक से किसी दिये हुए नियम के अनुसार प्रतिच्छेद करती है।

उदाहरण

वह वक्र जो वक्र के कुल के प्रत्येक घटक से किसी विशेष कोण पर प्रतिच्छेद करती हो, संछेदी कहलायेगी। जब यह कोण समकोण होता है, तब प्रतिच्छेदी वक्र को लम्बकोणीय संछेदी कहते हैं।

परिभाषा

वक्र के दो कुल लम्बकोणीय संछेदी कहलाते हैं, यदि एक कुल का प्रत्येक घटक दूसरे कुल के प्रत्येक घटक को समकोण पर प्रतिच्छेद करे।

मान लो दिये गये वक्रों के कुल का समीकरण है

$$f(x, y)\ dy/dy)=0 \tag{1}$$

मान लो (1) की लम्बकोणीय संछेदी के किसी बिन्दु के चलित निर्देशांक x, y हैं। एवं उसके लम्बकोणीय संछेदी के किसी प्रतिच्छेद बिन्दु पर, हमें प्राप्त होगा

$$X=x,\ Y=y,\ \frac{dY}{dX}=-\frac{1/dy}{dx}$$

अतः (1) में प्रतिस्थापित करने पर लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण होगा–

$$f(X, y, -dX/dY)=0$$

कार्यकारी नियम

लम्बकोणीय संछेदी का अवकल समीकरण ज्ञात करने के लिये हमें दिये हुए वक्रों के कुल के अवकल समीकरण में dy/dx के स्थान पर $-dx/dy$ भर लिखना है ।

ध्रुवीय निर्देशांक

हमें ज्ञात है कि वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्शी ध्रुवांतर त्रिज्या (radius (vector) से कोण ϕ बनाती है जहाँ,

$$\tan \phi = \gamma \frac{d\theta}{d\gamma}$$

इसी प्रकार लम्बकोणीय संछेदी की स्पर्शी अपने ध्रुवांतर त्रिज्या से कोण ϕ बनायेगी, जहाँ

$$\tan \phi' = \gamma' \frac{d\theta'}{d\gamma'}$$

चूँकि $\phi' = \phi + \pi/2$, अत:

$$\left(\gamma \frac{d\theta'}{d\gamma'} \right) \left(\gamma' \frac{d\theta'}{d\gamma'} \right) = -1$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण ज्ञात करने के लिये हमें दिये गये वक्रों के कुल के समीकरण में लिखना होगा

$$\gamma \frac{d\theta}{dr} \text{ की जगह } -1/\gamma \frac{d\gamma}{d\theta}$$

अर्थात्

$$\frac{dr}{d\theta} \text{ की जगह } -\gamma^2 \frac{d\theta}{d\gamma}$$

उदाहरण

(1) अतिपरवलयों के कुल $xy = c$ का लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात करो ।

हल: दिये हुए कुल का अवकल समीकरण है

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

अतः

$\frac{dy}{dx}$ को $-\frac{dx}{dy}$ से बदलने पर हमें लम्बकोणीय संछेदी का अवकल समीकरण ज्ञात होगा।

$$y-x\frac{dx}{dy}=0$$

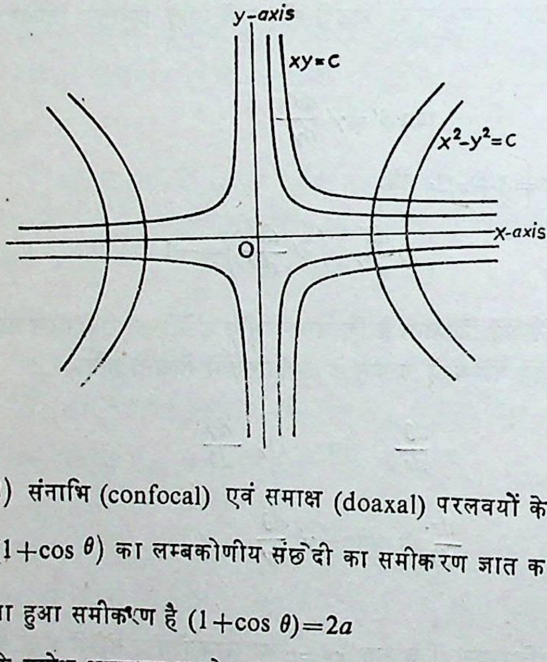
अर्थात्

$$ydy-xdx=0$$

समाकलन करने पर लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण ज्ञात होता है

$$y^2-x^2=c$$

जो कि प्रतिपरवलयों का कुल है।



(2) संनाभि (confocal) एवं समाक्ष (doaxal) परलवयों के कुल $\gamma= 2a/(1+\cos\theta)$ का लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण ज्ञात करो।

हल : दिया हुआ समीकरण है $(1+\cos\theta)=2a$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\gamma(-\sin\theta)+(1+\cos\theta)dr/d\theta=0$$

अर्थात्

$$(1+\cos\theta)d\gamma/d\theta=\gamma\sin\theta$$

अतः

$dr/d\theta$ को $-\gamma^2\ d\theta/d\gamma$ से बदलने पर लम्बकोणीय संछेदी का अवकल समीकरण होगा

$$(1+\cos\theta)\left(-\gamma^2\ \frac{d\theta}{dr}\right)=\gamma\sin\theta$$

अर्थात

$$\frac{1+\cos\ \theta}{\sin\ \theta}d\theta=-\frac{dr}{\gamma}$$

$$\frac{\cos\ \theta/2}{\sin\ \theta/2}\ d\theta=-\frac{dr}{\gamma}$$

समाकलन करने पर

$$2\log\sin\ \theta/2=\log c-\log\gamma$$

अर्थात्

$$\sin^2\ \theta/2=C/\gamma$$

या

$$1-\cos\theta=2c/\gamma$$

अर्थात्

$$r=2c/(1-\cos\ \theta)$$

(3) दर्शाओ कि संनाभि शांकवों का कुल $x^2/c+y^2/c-\lambda=1$, जहां c स्वेच्छ अचर है, स्वलांबिक (Self orthogonal) है।

हल : कुल के समीकरण का x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$x/c+yp/c-\lambda=0, \qquad \text{जहाँ } p=dy/dx$$

अर्थात्

$$(c-\lambda)x+cyp=0$$

अतः

$$c=\frac{\lambda x}{x+yp}$$

$$\therefore \qquad c-\lambda=\frac{\lambda x}{x+yp}-\lambda=\frac{-\lambda yp}{x+yp}$$

इन मानों को कुल के समीकरण में रखने पर प्राप्त होगा

$$x\ \frac{(x+yp)}{\lambda}-\frac{y(x+yp)}{\lambda p}-1=0$$

अतः शांकवों के कुल का अवकल समीकरण होगा

$$(x+yp)\ (px-y)-\lambda p=0$$

यह आसानी से देखा जा सकता है कि जब p को $-1/p$ से बदल दिया जाये, तब भी उपरोक्त अवकल समीकरण अपरिवर्तित रहता है। अतः उपरोक्त अवकल समीकरण लम्बकोणीय संछेदी का भी अवकल समीकरण है। अतः संनाभि शांकवों का कुल स्वलांबिक है।

प्रश्नावली 19

1. किसी वक्र के प्रत्येक बिन्दु (x, y) पर y-अक्ष पर स्पर्शी का अन्तःखण्ड $2xy$ है, वक्र ज्ञात करो।
2. उस वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसके ध्रुवीय अधोलम्ब एवं ध्रुवाँतर त्रिज्या के परिवर्तन की दर समान हो।
3. उस वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसकी अधःस्पर्शी स्पर्श बिन्दु के भुज से n गुनी हो उस विशेष वक्र का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(2, 3)$ से गुजरता हो।
4. वक्रों के निम्न कुल का लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात करो

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

5. वह अवकल समीकरण ज्ञात करिये जो परवलयों के कुल $y^2 = 4a(x+a)$ को संतुष्ट करता हो। दर्शाइये कि यह कुल स्वलांबिक है।
6. संकेंद्री वृत्तों के कुल $x^2 + y^2 = c$ को $45°$ पर प्रतिच्छेद करने वाले संछेदी का समीकरण ज्ञात करो।

   (संकेत : वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण है $x + yy' = 0$; y' को $(y'-1)/(1+y')$ से बदलो)
7. अर्धघन परवलयों के कुल $ay^2 = x^3$ का लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात करो।
8. सिद्ध करो कि वक्रों के कुल $A = r \sin^2\theta$ का लम्बकोणीय संछेदी वक्र कुल $B = r^2 \cos\theta$ होगा।
9. दर्शाओ कि संनाभि शांकवों का निम्न कुल स्वलांबिक है।

$$\frac{y^2}{a^2+\lambda} \quad \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$

10. उस वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसकी स्पर्शी निर्देशांक अक्षों से ऐसे अन्तःखण्ड काटती हैं जिनका योग अचर है ।

11. हृदयाभों (cardiods) के कुल $r=a(1-\cos\theta)$ का लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात करो

12. वह वक्र ज्ञात करो जिस पर स्पर्शी एवं ध्रुवांतर त्रिज्या के बीच का कोण सदिश कोण (vectorial angle) का n गुना है ।

13. वह वक्र ज्ञात करो जिसमें ध्रुवांतर त्रिज्या एवं स्पर्शी के बीच का कोण सदिश कोण का आधा है ।

अध्याय 3

अचर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरण

(Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

3.1 परिभाषा

हमें ज्ञात है कि रैखिक अवकल वह समीकरण वह है जिसमें परतंत्र चर y एवं उसके अवकल गुणांकों की घात एक होती है। और भी यदि y एवं उसके अवकलजों के गुणांक अचर राशि है, तब उस समीकरण को अचर गुणांकों वाला रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं। ऐसा समीकरण निम्न रूप का होगा :

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x) \qquad (1)$$

जहां $f(x)$ X का फलन है, तथा प्रत्येक a_i अचर है।

उपरोक्त समीकरण (1) की कोटि (order) $n>1$ है। यदि प्रथम पद $d^n y/dx^n$ का गुणांक इकाई नहीं है, तो उसका जो भी अचर गुणांक हो, उससे पूरे समीकरण को भाग देने पर प्रथम पद का गुणांक इकाई हो जायेगा।

प्रथम कोटि के रैखिक समीकरण का अध्ययन §1.25 में किया जा चुका है।

समीकरण (1) का दायां पक्ष शून्य लेने पर

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n y=0 \qquad (2)$$

हम पहिले दर्शायेंगे कि समीकरण (2) का सम्पूर्ण हल समीकरण (1) के सम्पूर्ण हल में, उसके ही एक भाग के रूप में, अंतर्विष्ट है।

यदि $y=y_1$ समीकरण (2) का एक समाकल है, तब (2) में प्रतिस्थापन करके हम सुगमता से देख सकते हैं कि $y=c_1y_1$ भी एक हल है, जहाँ c_1 स्वेच्छ अचर है। इसी प्रकार यदि

$$y=y_2,\ y=y_3, \ldots\ldots, y=y_n$$

(2) के समाकल हैं, तब

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots\ldots+c_ny_n \tag{3}$$

भी समाकल हैं, जहां $c_1, c_2 \ldots c_n$ स्वेच्छ अचर हैं।

यदि $y_1, y_2 \ldots y_n$ एकघाती स्वतंत्र हैं (linearly independent)* तब (3) ही समीकरण (2) का संपूर्ण हल है, क्योंकि इसमें n स्वेच्छ अचर हैं, तथा (2) की कोटि भी n है।

यदि $y=u$ समीकरण (1) का कोई हल है, तब

$$y=Y+u, \tag{4}$$

जहाँ

$$Y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots\ldots c_ny_n,$$

भी (1) का हल है, क्योंकि (1) के वाम पक्ष में y के स्थान पर Y रखने पर शून्य प्राप्त होता है, तथा y की जगह u रखने पर, मान्यता के अनुसार, X प्राप्त होगा। चूंकि हल (4) में n स्वेच्छ अचर समाहित हैं, यही समीकरण (1)

---

*यदि ऐसे अचर $b_1, b_2, \ldots, b_n$ जो सभी शून्य नहीं हैं, प्राप्त किये जा सकते हैं कि :

$$b_1y_1+b_2y_2+\ldots\ldots+b_ny_n=0,$$

तब $y_1, y_2, \ldots y_n$ एकघाती आश्रित कहलाते हैं। दूसरी तरफ यदि

$$b_1y_1+b_2y_2+\ldots\ldots+c_ny_n=0$$

$\Rightarrow bi=0$, प्रत्येक i के लिये, $i=1, 2, \ldots, n$ तब $\{yi\}$ एकघाती स्वतंत्र कहलाते हैं।

का संपूर्ण हल है। भाग Y को पूरक फलन तथा भाग u को विशेष समाकल कहते हैं। पूरक फलन एवं विशेष समाकल के योग से ही (1) का व्यापक या संपूर्ण हल प्राप्त होता है।

3.2 हम पहिले उस स्थिति का अध्ययन करेंगे जबकि समीकरण का दायां पक्ष शून्य होगा।

स्थिति 1 जब $f(x)=0$, तब समीकरण होगा :

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+a_n y=0, \tag{1}$$

यदि हम प्रयोग के लिये मान लें कि e^{mx} समीकरण (1) का हल है, तब (1) में इसका प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होगा कि :

$$e^{mx}\,(m^n+a_1 m^{n-1}+\ldots+a_n)=0$$

अत: e^{mx} समीकरण (1) का हल होगा यदि m निम्न बीजीय समीकरण का मूल होगा :

$$m^n+a_1 m^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{2}$$

इसे सहायक समीकरण (auxiliary equation) कहते हैं।

अत: यदि m का कोई मान, मान लो m_1, समीकरण (2) को संतुष्ट करता है, तब $y=e^{m_1 x}$ समीकरण (1) का समाकल है। यदि (2) के n मूल m_1, $m_2, \ldots m_n$ हैं एवं वे तब भिन्न हैं, तब $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots e^{m_n x}$ भी सभी भिन्न हैं व एकघाती स्वतंत्र हैं। अत: (1) का संपूर्ण हल है :

$$y=c_1 e^{m_1 x}+c_2 e^{m_2 x}+\ldots+c_n e^{m_n x} \tag{3}$$

(2) समीकरण हल करो :

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-12\,y=0$$

सहायक समीकरण है

$$2m^2+5m-12=(m+4)\,(2m-3)=0$$

इसके मूल हैं :

$$m=-4,\ 3/2$$

अत: समीकरण का व्यापक हल है

$$y=e_1 e^{-4x}+c_2 e^{3/2x}$$

(3) यदि

$$\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=0$$

तो दर्शाओ कि

$$y=A\cosh kx+B\sinh kx$$

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2-k^2=0,$$

अतः

$$m=\pm k$$

अतः समीकरण का हल है ।

$$y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$$

$$=c_1(\cosh kx+\sinh kx)$$

$$+c_2(\cosh kx-\sinh kx)$$

$$=(c_1+c_2)\cosh kx+(c_1-c_2)\sinh kx$$

$$=A\cosh kx+B\sinh kx$$

(4) हल करो :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=0,$$

प्रारंभिक प्रतिबन्ध दिया है, जब $t=0$, $x=0$,

एवं

$$\frac{dx}{dt}=0$$

हल : यहां t स्वतंत्र चर है एवं x परतंत्र चर ।

समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m^2-3m+2=0;$$

अर्थात

$$(m-1)(m-2)=0$$

अतः

$$m=1, 2$$

अतः समीकरण का व्यापक हल है :

$$x=c_1e^t+c_2e^{2t} \tag{1}$$

(1) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt}=C_1e^t+2c_2e^{2t} \tag{2}$$

प्रारंभिक प्रतिबन्ध के अनुसार (1) एवं (2) से प्राप्त होगा

$$0=C_1+C_2 \qquad \because x=0, t=0$$

$$0=C_1+2C_2 \qquad t=0, \frac{dx}{dt}=0$$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर

$$C_1=C_2=0$$

ये मान (1) में रखने पर हल प्राप्त होता है :

$$X=0.$$

3.21 सहायक समीकरण के मूल अधिकल्पित या सम्मिश्र हों (Auxiliary Eqution has imaginary or complex roots)

मान लो कि पिछले अनुच्छेद के समीकरण (1) के गुणांक $a_1, a_2 \ldots$ सब वास्तविक हैं। यदि सहायक समीकरण (2) के कोई मूल अधिकल्पित हैं, तो वे युग्म में ही उपस्थित होंगे। मान लो $\alpha \pm i\beta$ सम्मिश्र मूलों का युग्म है, तब उनके संगत हल होगा :

$$C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

हम इसे वास्तविक, अधिक सुविधाजनक एवं अधिक उपयोगी रूप में परिवर्तित कर सकते हैं। हमें प्राप्त होगा :

$$C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}=C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$
$$+C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$
$$=e^{\alpha x}\{(C_1+c_2)\cos\beta x+(iC_1-ic_2)\sin\beta x\}$$
$$=e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$$
$$=C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x+C_2)$$

प्रथम दृष्टि में ऐसा प्रतीत होता है कि A_2 अधिकल्पित होगा, किन्तु यह आवश्यक नहीं है।

अतः यदि सहायक समीकरण (2) के मूलों में अधिकल्पित मूलों का युग्म $\alpha \pm i\beta$ हो, तब (1) का व्यापक हल होगा :

$$C_1 e^{\alpha x} \cos (\beta x + C_2) + C_3 e^{m_3 x} + C_4 e^{m_4 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

टिप्पणी : यदि सहायक समीकरण के मूलों में एक युग्मीकरणी को संबद्ध करता हो, मान लो मूल हैं $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ जहां β धनात्मक है, तब इस युग्म के संगत पूरक फलन में पद होगा :

$$C_1 e^{\alpha x} \cosh (x\sqrt{\beta} + C_3)$$

या

$$C_1 e^{\alpha x} \sinh (x\sqrt{\beta} + C_4)$$

उदाहरण :

(5) समीकरण हल करो।

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13\, y = 0$$

सहायक समीकरण है

$$m^2 - 6m + 13 = 0$$

जिसके मूल हैं

$$m = 3 \pm 2i$$

अतः हल होगा :

$$y = Ae^{(3+i)x} + Be^{(3-2i)x}$$

या अधिक सुविधाजनक रूप में (पिछले अनुच्छेद के अनुसार)

$$y = e^{3x} (E \cos 2x + F \sin 2x)$$

या

$$y = Ce^{3x} \cos (2x - \alpha),$$

जहां

$$C \cos \alpha = E \text{ एवं } c \sin = F$$

अतः

$$C = \sqrt{(E^2 + F^2)} \text{ एवं } \tan x = F/E$$

(6) हल करो :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8y = 0$$

सहायक समीकरण होगा

$$m^3 - 8y = 0,$$

जिसके गुणनखण्ड हैं,

$$(m-2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

अतः

$$m = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$$

अतः समीकरण का हल है

$$y=G_1e^{2x}+C_2e^{-x}\cos(X\sqrt{3}+C_2)$$

(7) हल करो :

$$\frac{d^4y}{dx^4}+5\frac{d^2y}{dx^2}-36y=0$$

सहायक समीकरण होगा

$$m^4+5m^2-36=0$$

अर्थात

$$(m^2-4)(m^2+9)=0$$

स्पष्ट है कि

$$m=\pm 2,\ \pm 3i$$

अतः समीकरण का हल है

$$y=Ae^{2x}+Be^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$$

हमें ज्ञात है

$$\cosh 2x=\tfrac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$$

तथा

$$\sinh 2x=\tfrac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})$$

अतः उपरोक्त हल को हम निम्न रूप से लिख सकते हैं :

$$y=C_1\cosh 2x+C_2\sinh 2x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$$

(8) $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

को हल करो, दिया है कि $y=2$, जब $x=0$, एवं $y=-2$, जब $x=\pi/2$

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2+1=0 \text{ या } m=\pm i$$

अतः व्यापक हल है

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

प्रतिबन्ध के अनुसार

$$2=C_1 \text{ एवं } -2=C_2$$

अतः हल है

$$y=2\cos x-2\sin x$$

या

$$y=2\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)$$

प्रश्नावली 20

1. प्रतिस्थापन द्वारा दर्शाओ कि समीकरण $d^2y/dx^2-y=0$, का व्यापक हल है :

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

2. दर्शाओ कि $y=c+e^{-x}$, प्रश्न (1) के अवकल समीकरण का हल नहीं है ।

3. प्रतिस्थापन द्वारा दर्शाओ कि समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0,$$

का व्यापक हल है :

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

निम्न अवकल समीकरणों को हल करो :

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-54y=0$

5. $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$

6. $\frac{d^3y}{dx^3}+8y=0$

7. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}=0$

8. $\frac{d^3y}{dx^3}-(a+b+c)\frac{d^2y}{dx^2}+(ab+ac+bc)\frac{dy}{dx}-abcy=0$

(संकेत सहायक समीकरण है $(m-a)(m-b)(m-c)=0$

9. $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}-6y=0$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}+2p\frac{dy}{dx}+(p^2+q^2)y=0$

11. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0$

12. $\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=0$

13. यदि

$$\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$$

तो सिद्ध करो :

$$y=C_1 \cosh mx+C_2 \sinh mx$$

14. समीकरण

$$l\frac{d^2\theta}{dx^2}+g\theta=0,$$ को हल करो,

दिया है, जब $t=0$, $\theta=\alpha$ एवं $d\theta/dt=0$

3.22 संकारक D (Operator D)

जब किसी अवकल समीकरण का हल निरीक्षण द्वारा स्पष्ट न हो, तब संकारक D, जो d/dx के लिये प्रयुक्त होता है, बहुत सुविधाजनक सिद्ध होता है। जब सहायक समीकरण में दो मूल समान हों, तब पूरक फलन का संगत स्वरूप ज्ञात करने में यह संकारक विशेष उपयोगी है। जिस प्रकार d/dx को हम D संकेत देंगे, उसी प्रकार d^2/dx को D^2, d^3/dx को D^3,... आदि।

व्यंजक

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+3y$$

को हम लिखेंगे

$$2D^2y+7Dy+3y\ (2D^2+7L+3)y$$

इसे हम गुणनखण्डों में वियोजित करके भी लिख सकते हैं

$$(2D+1)(D+2)y$$

D के व्यंजक का हम साधारण बीजीय राशि के समान ही गुणनखण्ड निकालते हैं।

इसी प्रकार अनुच्छेद 3.2 के समीकरण (1) को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_1D^{n-2}+\ldots+a_{n-4}D+a_n)y=0$$

या केवल

$$f(D)y=0$$

y को केवल एक बार लिखना सुविधाजनक होता हैं। यदि सहायक समीकरण के मूल

$$m_1, m_2, \ldots m_n$$

हों तो उपरोक्त समीकरण को गुणनखण्डित रूप में भी लिखा जा सकता है

$$(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n)y=0$$

इन गुणनखण्डों को किसी भी क्रम में लिखा जाये, उससे कोई अन्तर नहीं आता। उदाहरण के लिये द्वितीय कोटि से निम्न समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

को संकारक D का उपयोग करने पर हम लिखेंगे

$$\{D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta\}y=0$$

गुणनखण्डित रूप में,

$$(D-\alpha)(D-\beta)y=0$$

D को d/dx से बदलने पर यह समीकरण होगा

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)y=0$$

y पर $d/dx-\beta$ से संक्रिया करने पर प्राप्त होगा

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx}-\beta y\right)=0$$

अब द्वितीय गुणनखण्ड पर प्रथम गुणनखण्ड से संक्रिया करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta\, y=0$$

यदि गुणनखण्डों को उल्टे क्रम में लिखा जाये

$$(D-\beta)(D-\alpha)\, y=0$$

तब उपरोक्त विधि से विस्तार करने पर हमें वही परिणाम प्राप्त होगा।

सामान्यतः बीजगणित में जो संक्रियायें की जाती हैं, वे तीन नियमों पर आधारित रहती हैं

I वितरण नियम (Distributive Law)

$$m(a+b)=ma+mb$$

II क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law)

III घात नियम

$$a^m, a^n = a^{m+n}$$

संकारक D इनमें से प्रथम एवं तृतीय नियमों का सन्तुष्ट करता है ।

$$D(y+z) = Dy + Dz$$

$$D^m D^n y = D^n D^m y = D^{m+n} y$$

जहाँ m एवं n धनात्मक पूर्णांक हैं। इस प्रकार D बीजगणित के मूलभूत नियमों को सन्तुष्ट करता है, सिवाय इसके कि वह चरों के साथ क्रम विनिमेय नहीं है–

$$Dy \neq yD,\ D(yz) \neq yDz$$

yD तो अर्थहीन है, तथा

$$D(yz) = yDz + zDy$$

संकारक D के बीजीय स्वरूप को मान्यता देकर, अब हम उसका उपयोग करेंगे

$$(D-m)y = 0$$

का हल स्पष्टत:

$$y = ce^{mx}$$

है। इसी प्रकार समीकरण

$$(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n)y = 0,$$

जहाँ सारे गुणनखण्ड भिन्न हैं, का हल ज्ञात ही है

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

3.23 समान मूलों वाला सहायक समीकरण

यदि सहायक समीकरण के दो मूल बराबर हों, मान लो

$$m_1 = m_2,$$

तब अवकल समीकरण

$$f(D)y = 0,$$

जिसे अनुच्छेद 3.2 में हल किया गया था, (3) के हल का रूप होगा

$$y = (C_1 + C_2)e^{m_1 x} + C_3 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

चूंकि C_1+C_2 केवल एक स्वेच्छ अचर के तुल्य है, अत: उपरोक्त हल में केवल $(n-1)$ स्वेच्छ अचर हैं, अतः यह व्यापक हल नहीं है। इसका व्यापक हल ज्ञात करने के लिये हमें ध्यान देना है कि बीजीय समीकरण

$$f(D)=0,$$

के दो मूल m_1 के तुल्य हैं, अत: यदि हम अवकल समीकरण

$$(D-m_1)^2y=0 \tag{1}$$

का व्यापक हल ज्ञात कर लें, तो हमें

$$f(D)y=0,$$

का व्यापक हल ज्ञात हो जायेगा।

(1) को हल करने के लिये हम प्रतिस्थापन करते हैं

$$(D-m_1)y=v,$$

तब (1) का समानीत रूप होगा

$$(D-m_1)v=0,$$

या

$$\frac{dv}{dx}=m_1v,$$

जो कि पृथक्करणीय चर रूप का है, उसका हल है

$$v=ce^{m_1x}$$

अर्थात्

$$(D-m_1)y=ce^{m_1x}$$

या

$$\frac{dy}{dx}-m_1y=ce^{m_1x}$$

जो कि रैखिक समीकरण है, तथा इसका हल है

$$y.e^{-m_1x}=e+cx$$

या

$$y=(e+cx)e^{m_1x}$$

अत: (1) का व्यापक हल है

$$y=(c_1+c_2x)e^{m_1x}$$

अत: इस स्थिति में

$$f(D)y=0,$$

का व्यापक हल है

$$y=(c_1+c_2x)e^{m_1x}+c_3e^{m_3x}+\ldots+c_ne^{m_nx}$$

इसी प्रकार यदि तीन मूल बराबर हों, मान लो m_1, तब हमें निम्न समीकरण हल करना है

$$(D-m_1)^3y=0$$

जिसको हम लिख सकते हैं

$$(D-m_1)(D-m_1)^2y=0$$

अब हम प्रतिस्थापना करते हैं

$$(D-m_1)^2y=v,$$

तब समीकरण का रूप होगा

$$(D-m_1)v=0,$$

पहिले के समान हल होगा

$$v=(D-m_1)^2y=Ce^{m_1x}$$

अब

$$(D-m_1)y=w$$

रखने पर हमें प्राप्त होगा

$$(D-m_1)w=C_1e^{m_1x}$$

पहिले के समान इसका हल होगा

$$w=(D-m_1)y=(C_1x+c_2)e^{m_1x}$$

अर्थात्

$$\frac{dy}{dx}-m_1y=(c_1x+c_2)e^{m_1x}$$

यह भी रैखिक समीकरण है; तथा हल है

$$ye^{-m_1x}=c_1(x/2)+c_2x+c_3$$

अतः

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{m_1x}$$

चूँकि c_1,c_2,c_3 स्वेच्छ अचर हैं, उन्हें किसी भी सुविधाजनक रूप में लिखा जा सकता है।

यह स्पष्ट है कि यदि मूल m_1 r बार पुनरावृत्त होती है, तो उसके संगत समाकल होगा।

$$y=(c_1-c_2x+\ldots+c_rx^{r-1})e^{m_1x}$$

तथा इस स्थिति में

$$f(D)y=0$$

का हल होगा

$$y=(c_1+c_2x+\ldots+c_rx^{r-1})e^{m_1x}+c_{r+1}e^{m_{r+1}}+\ldots c_ne^{m_nx}$$

टिप्पणी : अवकलन समीकरण (1) को हल करने की विकल्प विधि **3.34** में दी जायेगी।

3.24 समान अधिकल्पित मूलों वाला सहाणक समीकरण

हमें ज्ञात है कि यदि

$$f(m)=0$$

के मूलों में एक युग्म अधिकल्पित मूलों का है, मान लो $\alpha\pm i\,\beta$, तो इनके संगत समाकल होगा

$$c_1c^{\alpha x}\cos(\beta x+c_2),$$

तथा इस स्थिति में

$$f(D)y=0,$$

का व्यापक हल होगा

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x+c_2)+c_3e^{m_3x}+\ldots+c_ne^{m_nx}$$

यदि

$$f(m)=0$$

की कोई अधिकल्पित मूल दो बार पुनरावृत्त है, मान लो $\alpha+i\,\beta$ एवं $\alpha-i\,\beta$ दो बार आती है, तब इनके संगत समाकल होगा

$$y=(c_1+c_2x)e^{(\alpha+i\beta)x}+(e_3+c_4x)e^{(\alpha-i\beta)x}$$

इसे हल करके आसानी से निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$y=\{(c_1+c_2x)\cos\beta x+(c_3+c_4x)\sin\beta x\}e^{\alpha x}$$

तथा इस स्थिति में

$$f(D)y=0,$$

का हल होगा

$$y=\{(c_1+c_2x)\cos\beta x+(c_3+c_4x)\sin\beta x\}$$
$$e^{\alpha x}+c_5e^{m_5x}+\ldots+c_ne^{m_nx}$$

उदाहरण : (1) हल करो

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$$

या

$$(D^2+6D+9)y=0$$

अर्थात्

$$(D+3)^2y=0$$

अतः मूल $m=-3$ दो बार पुनरावृत्त है !

व्यापक हल है

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

या

$$y=(c_1+c_2x)e^{-x3}$$

(2) हल करो

$$(D^3-3D^2+3D-1)y=0$$

या

$$(D-1)^3y=0,$$

अतः मूल $m-=1$ की पुनरावृत्ति तीन बार हो रही है ।

व्यापक हल है

$$y=(C_1+c_2x+c_3x^2)e^x$$

(3) $(D^4-8D^2+16)y=0$

या

$$(D^2-4)^2y=0$$

इसका सहायक समीकरण है

$$(m^2-4)^2=0$$

या

$$(m-2)^2(m+2)^2=0$$

अर्थात् मूल $m=2$ एवं $m=-2$, दोनों दो बार पुनरावृत्त हैं, अतः व्यापक हल है

$$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_3+c_4x)e^{-2x}$$

(4) हल करो

$$(D^2-2D+5)^2y=0$$

सहायक समीकरण है

$$(m^2-2m+5)^2=0$$

अतः

$$m=\frac{2\pm\sqrt{((4-20))}}{2}=1\pm2i$$

अर्थात संमिश्र मूल $1\pm2i$ दो बार पुनरावृत्त है, व्यापक हल है

$$y=\{(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x\}\,e^x$$

(5) $(D^6+3D^4+3D^2+1)y=0$

या

$$(D^2+1)^3y=0$$

सहायक समीकरण है

$$(m^2+1)^3=0$$

अत: $m=\pm i$, यह युग्म तीन बार पुनरावृत्त है ।

व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)\cos x+(c_4+c_5x+c_6x^2)\sin x$$

प्रश्नावली 21

1. हल करो :

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

2. $(D^4+2D^3+D^2)y=0$

3. $(D^4-6D^3+12D^2-8D)y=0$

4. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+8\dfrac{d^2y}{dx^2}+16y=0$

5. $(D^4+2D^3+3D^2+2D+1)y=0$

(संकेत : सहायक समीकरण है $(m^2+m+1)^2=0$)

6. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=0$

7. $(4D^5-3D^3-D^2)y=0$

8. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+m^4y=0$

9. $(D^3+D+1)(D-2)y=0$

3.25 द्वितीय स्थिति

अचर गुणांकों वाला रैखिक समीकरण

जिसका दायां पक्ष X का फलन है

इस अनुच्छेद में हम निम्न समीकरण का अध्ययन करेंगे ।

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n y=f(x) \qquad (1)$$

जिसका वाम पक्ष वही है जो कि समीकरण (1)3.21 का था, लेकिन दायां पक्ष X का फलन है । अनुच्छेद 3.1 में हमने कहा था कि उपरोक्त समीकरण (1) का सम्पूर्ण समाकल दो भागों को अन्तर्विष्ट करता है—एक पूरक फलन व दूसरा विशेष समाकल, पूरक फलन उपरोक्त समीकरण का हल उस स्थिति में होता है, जबकि (1) का दायाँ पक्ष शून्य हो । अब हमें विशेष समाकल को प्राप्त करने की विधि का चिन्तन करना है ।

संकारक का उपयोग करके हम (1) को लिख सकते हैं

$$F(D)y=f(x) \qquad \text{—} \qquad (2)$$

तब अभीष्ठ विशेष समाकल लिखा जा सकता है

$$y=\frac{1}{F(D)}f(x)$$

3.26 सांकेतिक फलन

$1/F(D)$ संकेत $1/F(D)\,f(x)$ अभी अर्थहीन है, उसकी परिभाषा देना नितांत आवश्यक है । हम कह सकते हैं कि $1/F(D)\,f(x)$, X का वह फलन है, जिस पर $F(D)$ द्वारा संक्रिया किये जाने पर $f(x)$ प्राप्त होता है । इस प्रकार $1/F(D)$ संकारक $F(D)$ का प्रतिलोम है । इस परिभाषा एवं अनुच्छेद से हम दर्शा सकते हैं कि $1/F(D)$ को गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता, या उसे आंशिक भिन्नों में विभक्त किया जा सकता है ।

उदाहरण के लिये निम्न समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=f(x),$$

का विशेष समाकल होगा

$$\frac{1}{D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta}f(x),$$

तथा इसको निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$\frac{1}{(D-\alpha)\,(D-\beta)}(fx)$$

अब इस पर संकारक $(D-\alpha)$ $(D-\beta)$ से क्रिया करो, इसके गुणनखण्डों का क्रम हम अपनी सुविधानुसार परिवर्तित कर सकते हैं।

अब

$$(D-\beta)\;(D-\alpha)\;\frac{1}{(D-\alpha)\,(D-\beta)}\,f(x)$$

चूँकि परिभाषा के अनुसार $D-\alpha$, जब $1/D-\alpha.1/D-\beta\, f(x)$. पर संक्रिया करेगा, तो हमें $1/D-\beta.\, f(x)$ प्राप्त होगा ; फिर $(D-\beta)\; 1/D-\beta.\; f(x) = f(x)$ होगा, क्योंकि यही $1/F(D)$ की परिभाषा है। इससे यह भी स्पष्ट होता है कि विशेष समाकल को हम निम्न प्रकार से लिख सकते थे।

$1/F(D)\, f(x)$ को हम $\{F(D)\}^{-1}f(x)$ लिखते हैं।

परिभाषा के अनुसार

$$F(D)[\{F(D)\}^{-1}f(x)]=f(x)$$

यदि $F(D)=D$ लें, तब

$$D\{D^{-1}f(x)\}=f(x) \text{ अर्थात } d/dx\{D^{-1}f(x)\}=f(x)$$

अत:

$$D^{-1}f(x)=\int f(x)dx$$

लेकिन $\int f(x)dx$, के समाकलन में हमें कोई स्वेच्छ अचर जोड़ने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि हम केवल विशेष समाकल ज्ञात कर रहे हैं। हम देखेंगे कि $\{F(D)\}^{-1}f(x)$ के समाकल में जो भाग स्वेच्छ अचर को समाहित करेगा, वह पहिले ही पूरक फलन में प्राप्त किया जा चुका है, अत: विशेष समाकल में उसे अंतर्विष्ट करने से हल और अधिक व्यापक नहीं होगा।

अब विशेष समाकल ज्ञात करने की प्रथम विधि का प्रतिपादन करेंगे।

प्रथम विधि : पहिले

का मान ज्ञात करेंगे।

$$(D-\alpha)^{-1}f(x)$$

मान लो

$$(D-a)^{-1}f(x)=v$$

तब परिभाषा के अनुसार

$$(D-a)v=f(x)$$

अर्थात

$$\frac{dv}{dx}-av=f(x),$$

जो कि रैखिक अलकल समीकरण है ; इसका हल है

$$v=e^{ax}\int e^{-ax}f(x)dx$$

ध्यान रहे कि समाकलन करने में हमें स्वेच्छ अचर नहीं जोड़ना है । अतः

$$(D-a)^{-1}f(x)=e^{ax}\int e^{-ax}f(x)dx$$

अब हम $\{F(D)^{-1}F(x)$ का मान निकाल सकते हैं । मान लो गुणनखण्डित करने पर

$$F(D)=(D-a_1)\,(D-a_2)..(D-a_n)$$

तब, चूँकि

$$(D-a_1)\,(D-a_2)...(D-a_n)y=f(x)$$

या

$$y=\frac{1}{(D-a_n)}\cdots\frac{1}{(D-a_1}f(x)$$

अतः परिभाषा के अनुसार

$$(D-a_2)...(D-a_n)y=(D-a_1)f(x)$$

$$=e^{a_1x}\int e^{-a_1x}f(x)dx$$

इसी प्रकार

$$(D-a_3)...(D-a_n)y=(D-a_2)^{-1}\{e^{a_1x}\int e^{-a_1x}f(x)dx$$

$$=e^{a_2x}\int e^{(a_1-a_2)x}(\int e^{-a_1x}f(x)(dx)dx$$

इसी प्रक्रम को करते हुए हमें अन्त में प्राप्त होगा।

$$y=e^{a_nx}\int e^{(a_{n-1}-a_n)x}\int\ldots\int e^{(a_1-a_2)x}(\int e^{-a_1x}f(x)dx)dx\ldots dx$$

यही अभीष्ट विशेष समाकल है ।

विशेष समाकल ज्ञात करने की दूसरी विधि अगले अनुच्छेद में दी है, वह अधिक आसान है । $f(x)$ के विशिष्ट मानों के लिये विशेष समाकल ज्ञात करने की विशिष्ट विधियाँ हैं, जो और भी अधिक आसान हैं ।

उदाहरण

हल करो

$$(D^2-3D+2)y=e^x$$

या

$$(D-1)\ (D-2)y=e^x$$

पूरक फलन है

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x} \qquad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}\,e^x$$

मान लो

$$v=\frac{1}{D-2}e^x$$

तब $(D-2)v=e^x$

या $\dfrac{dv}{dx}-2v=e^x$

जो रैखिक समीकरण है

अत:

$$v.e^{-2x}=\int e^x.e^{-2x}dy=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$$

अर्थात

$v=-e^x$, v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$y=\frac{1}{D-1}v,$$

या $(D-1)y=-e^x$

अर्थात

$$\frac{dy}{dx}-y=-e^x$$

हल करने पर

$$y=e^x\int(-e^x)e^{-x}dx=-xe^x \qquad (ii)$$

संपूर्ण समाकल $(i)+(ii)$ से प्राप्त होगा

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}-Xe^x$$

(2) हल करो

$$(D^2-6D+9)y=e^{2x}$$

या

$$(D-3)^2y=e^x$$

पूरक फलन है
$$y=(c_1+c_2x)e^{3x} \qquad (i)$$

विशेष समाकल है
$$y=\frac{1}{D-3}\cdot\frac{1}{D-3}e^{2x}$$

मान लो
$$v=\frac{1}{D-3}e^{2x}$$

या
$$\frac{dv}{dx}-3v=e^{2x}$$

इस रैखिक समीकरण को हल करने पर
$$v.e^{-3x}=\int e^{2x}.e^{3x}dx=-e^{-x}$$

अत:
$$v=-e^{2x}$$

अब
$$y=\frac{1}{D-3}(-e^{2x})=(-1)\frac{1}{D-3}e^{2x}$$

चूँकि उसी संकारक की पुनरावृत्ति होती है, अत:
$$y=(-1)(-1)e^{2x}=e^{2x} \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल प्राप्त होता है
$$y=(c_1+c_2x)e^{3x}+e^{2x}$$

(3) हल करो
$$(D^3+3D^2-4)y=xe^{-2x}$$

या
$$(D-1)(D+2)^2y=xe^{-2x}$$

पूरक फलन है
$$y=c_1e^x+(c_2+c_3x)e^{-2x} \qquad (i)$$

विशेष समाकल है
$$y=\frac{1}{D-1}\;\frac{1}{D+2}\;\frac{1}{D+2}(xe^{-2x})$$

मान लो
$$u=\frac{1}{D+2}.xe^{-2x}$$

तब
$$\frac{du}{dx}+2u=xe^{-2x}$$

हल करने पर

$$u=e^{-2x}\int(xe^{2x})e^{2x}dx=1/2x^2e^{-2x}$$

अब मान लो

$$v=\frac{1}{D+2}u,$$

तब

$$\frac{dv}{dx}+2v=1/2x^2e^{-2x}$$

अत:

$$v=e^{-2x}\int(1/2x^2e^{-2x})e^{2x}dx=1/6x^3e^{-2x}$$

अन्त में

$$y=\frac{1}{D-1}v$$

अर्थात

$$\frac{dy}{dx}-y=1/6x^3e^{-2x}$$

अत:

$$y=e^x\int(1/6x^3e^{-2x})e^{-x}dx=e^x/6\int x^3e^{-3}dx$$

$$=-1/18e^{2+}(x^3+x^2+2/3x+2/9) \qquad (ii)$$

(i)+(ii) से सम्पूर्ण समाकल ज्ञात होगा :

$$y=c_1e^x+(c_2+c_3x)\,e^{-2x}-\frac{1}{18}(x^2+x^3)\,e^{-2x}$$

विशेष समाकल (ii) के शेष पद छोड़ दिये गये हैं, क्योंकि वे पहिले ही पूरक फलन में अन्तर्विष्ट हैं ।

3.27 द्वितीय विधि :

पिछले अनुच्छेद में हमने समीकरण (3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=f(x)$$

का विशेष समाकल निम्न रूप में लिखा था

$$y=\frac{1}{(D-\alpha)}\frac{1}{(D-\beta)}f(x)$$

अब आंशिक भिन्न (partial fractions) का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$y=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{D-\alpha}-\frac{1}{D-\beta}\right)f(x)$$

क्योंकि दायें पक्ष को

$$D-(\alpha+\beta)\,D+\alpha B=(D-\alpha)\,(D-\beta)$$

से संक्रिया करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)}\{(D-\beta)\,f(x)-(D-\alpha)\,f(x)\}=f(x)$$

इसी उदाहरण को और व्यापक बनाकर हम द्वितीय विधि का प्रतिपादन करते हैं।

मान लो $\{F(D)\}^{-1}$ जो कि D का बीजीय फलन है, आंशिक भिन्नों में वियोजित किया जा सकता है :

$$\frac{1}{F(D)}=\frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{D-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n}{D-\alpha_n}$$

हमारी मान्यता है कि $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ सभी भिन्न हैं, अत: कोई भी हर द्विघाती नहीं है।

अत:

$$\frac{1}{F(D)}\,f(x)=\left\{\frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{D-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n}{D-\alpha_n}\right\}f(x)$$

$$=A_1\,\frac{1}{D-\alpha_1}f(x)+A_2\,\frac{1}{D-\alpha_2}f(x)$$

$$+\ldots+A_n\,\frac{1}{D-\alpha_n}f(x)$$

पिछले अनुच्छेद में प्रथम विधि का अध्ययन करते समय हमने देखा है कि

$$\frac{1}{D-\alpha}f(x)$$

एक प्रथम कोटि के रैखिक समीकरण का विशेष समाकल है, तथा

$$\frac{1}{D-\alpha}f(x)=e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}f(x)\,dx$$

उदाहरण :

1. हल करो

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{4x}$$

सांकेतिक रूप में लिखने पर समीकरण होगा

$$(D^2-5D+6)\,y=e^{4x}$$

या

$$(D-3)\,(D-2)\,y=e^{4x}$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1\,e^{3x}+c_2\,e^{2x} \qquad \text{(i)}$$

तथा विशेष समाकल होगा

$$y=\frac{1}{(D-3)}\cdot\frac{1}{D-2}\,e^{4x}=\left(\frac{1}{D-3}-\frac{1}{D-2}\right)e^{4x}$$

$$=e^{3x}\int e^{-3x}\,.\,e^{4x}\,dx-e^{2x}\int e^{-2x}\,.\,e^{4x}\,dx$$

$$=e^{4x}-\frac{e^{4x}}{2}=\frac{1}{2}\,e^{4x} \qquad \text{(ii)}$$

अतः (i)+(ii) के द्वारा व्यापक हल होगा

$$y=c_1\,e^{3x}+c_2\,e^{2x}+\frac{1}{2}\,e^{4x}$$

2. समीकरण

$$(D^2+5D+4)\,y=3-2x$$

को दोनों विधियों से हल करो :

समीकरण है

$$(D+1)\,(D+4)\,y=3-2x$$

पूरक फलन है

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x} \qquad \text{(i)}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D+1)\,(D+4)}\,(3-2x)$$

प्रथम विधि:

$$y=\frac{1}{(D-1)}\left\{\frac{1}{(D+4)}\,(3-2x)\right\}$$

$$=e^{-x}\int e^{(-4+1)x}\left(\int(3-2x)\,e^{4x}\,dx\right)dx$$

$$=e^{-x}\int e^{-3x}\left(\frac{3}{4}e^{4x}-2x\ \frac{e^{4x}}{4}+\frac{1}{8}e^{4x}\right)dx$$

$$=e^{-x}\int\left(\frac{7}{8}e^{x}-\frac{1}{2}\ xe^{x}\right)dx$$

$$=e^{-x}\int\left(\frac{7}{8}\ e^{x}-\frac{1}{2}\ xe^{x}+\frac{1}{2}\ e^{x}\right)=\frac{11}{8}\ -\frac{X}{2} \qquad \text{(ii)}$$

द्वितीय विधि:

$$y=\frac{1}{(D+1)(D+4)}\,(3-2x)$$

$$=\left(\frac{1/3}{D+1}-\frac{1/3}{D+4}\right)(3-2x)$$

$$=\frac{1}{3}e^{-x}\int(3-2x)\ e^{x}\ dx-\frac{1}{3}e^{-4x}\int(3-2x)\ e^{4x}\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\ e^{-x}\ (3e^{x}-2xe^{x}+2e^{x})-\frac{e^{-4x}}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\ e^{4x}-\frac{2}{4}\ xe^{4x}+\frac{1}{8}\ e^{4x}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\ X\right)-\left(\frac{7}{24}-\frac{1}{6}x\right)$$

$$=\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x \qquad \text{(ii)a}$$

(i)+(ii) से सम्पूर्ण समाकल होगा :

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\ \frac{11}{8}$$

(3) हल करो

$$(D^2-1)\ y=\sin^2 x=\frac{1}{2}\ (1-\cos 2x)$$

गुणनखण्ड लेने पर

$$(D-1)\ (D+1)\ y=\frac{1}{2}\ (1-\cos 2x)$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x} \qquad \text{(i)}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D-1)}\cdot\ \frac{1}{(D-1)}\ \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

आंशिक भिन्न लेने पर

$$y=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+1}\right\}(1-\cos 2x)$$

अतः परिभाषा से

$$y=\frac{1}{4}(D-1)^{-1}(1-\cos 2x)-\frac{1}{4}(D+1)^{-1}(1-\cos 2x)$$

$$=I_1-I_2$$

मान लो

$$I_1=\frac{1}{4}e^{x}\int e^{-x}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{x}\{-e^{-x}-\int e^{-x}\cos 2x\,dx\}$$

$$=\frac{1}{4}e^{x}\left\{-e^{-x}-\left(\frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-1-\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{5}\cos 2x\right)$$

$$I_2=\frac{1}{4}e^{-x}\int e^{x}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{-x}\{e^{x}-\int e^{x}\cos 2x\,dx\}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-x}\left\{e^{x}-\left(\frac{2}{5}e^{x}\sin 2x+\frac{1}{5}e^{x}\cos 2x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{5}e^{x}\sin 2x-\frac{1}{5}e^{x}\cos 2x\right)$$

$$\therefore\quad I_1-I_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x \qquad \text{(ii)}$$

(i)+(ii) से सम्पूर्ण समाकल ज्ञात होगा—

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$$

(4) हल करो—

$$(D^2+9)\,y=x\cos x$$

सहायक समीकरण है

$$m^2+9=0,$$

अर्थात्

$$m=\pm 3i$$

अतः पूरक फलन

$$y=c_1 \cos 3x+c_2 \sin 3x \tag{i}$$

विशेष समाकल है—

$$y=\frac{1}{(D-3i)} \cdot \frac{1}{(D+3i)} x \cos x$$

अर्थात्

$$y=\frac{1}{6i}\left\{\frac{1}{D-3i}-\frac{1}{D-3i}\right\} X \cos x$$

$$=I_1-I_2 \text{ मान लो}$$

अतः

$$I_1=\frac{1}{6i}(D-3i)^{-1} X \cos x$$

$$=\frac{1}{6i}e^{3ix}\int e^{-3ix} x \cos x\, dx,\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$=\frac{1}{12i} e^{3ix} \int\{xe^{-2ix}+xe^{-4ix}\}\, dx$$

$$=\frac{1}{12i}\left\{-\frac{x}{2i}\ e^{ix}-\frac{e^{ix}}{4}\right\}+\frac{1}{12i}\left\{-\frac{xe^{-ix}}{4i}-\frac{e^{-ix}}{16}\right\}$$

$$I_2=\frac{1}{6i}(D+3i)^{-1} x \cos x$$

$$=\frac{1}{6i} e^{-3ix} \int e^{3ix} x \cos x\, dx$$

$$=\frac{1}{12i} e^{-3ix} \int\{xe^{4ix}+xe^{2ix}\}\, dx$$

$$=\frac{1}{12i}\left(X\cdot\frac{e^{ix}}{4i}+\frac{e^{ix}}{16}\right\}+\frac{1}{12i}\left\{X\ \frac{e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{-ix}}{4}\right\}$$

सरल करने पर, तथा

$$\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$$

का उपयोग कर

$$I_1-I_2=\frac{1}{8}x \cos x+\frac{1}{32} \sin x \tag{ii}$$

(i) व (ii) से सम्पूर्ण समाकल है—

$$y=c_1 \cos 3x+c_2 \sin 3x+\frac{1}{8}x \cos x+\frac{1}{32}\sin x$$

प्रश्नावली 22

निम्न अवकल समीकरण हल करो :

1. $(D^2-3D+2)\ y=e^x$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=2+5x$

3. $(D^2-2\ kD+k^2)\ y=e^x$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=2\ e^{2x}$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sec\ ax$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos\ x$

7. $(D^2+D)\ .\ y=1/(1+e^x)$

8. $(D^2-1)\ y=4\ xe^x$

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}=1+x^2$

3.3 विशिष्ट विधियां (Special Methods)

हमें ज्ञात ही है कि समीकरण $F(D)\ y=f(x)$ के विशेष समाकल को हम

$$y=\frac{1}{F(D)}f(x)$$

या

$$y=\{F(D)\}^{-1}f(x)$$

से दर्शाते हैं । अब $f(x)$ के भिन्न-भिन्न विशेष मानों के संगत हम विशिष्ट विधियों का प्रतिपादन करेंगे । हम प्रत्येक विशेष स्थिति के संगत सूत्र की उत्पत्ति भी बतलायेंगे, किन्तु ये सब मानक परिणाम हैं, अतः समीकरण हल करते समय उनका सीधा प्रयोग किया जायेगा ।

3.31 $\{F(D)\}^{-1}\ e^{ax}$

चूंकि $De^{ax}=ae^{ax},$

$$D^2e^{ax}=a^2e^{ax}, \cdots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^ne^{ax}=a^ne^{ax}$$

अत:

$$F(D)\ e^{ax}=\{D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\ D+a_n\}\ e^{ax}$$

$$=(a^n+a_1\ a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\ a+a_n)\ e^{ax}$$

$$=e^{ax}\ F(a) \qquad (1)$$

इससे सुझाव प्राप्त होता है कि यदि $F(a)\neq 0$,

$$\frac{1}{F(D)}\ e^{ax}=\frac{1}{F(a)}\ e^{ax}$$

इस सुझाव को आसानी से प्रमाणित किया जा सकता है, क्योंकि उपरोक्त नियम (1) द्वारा

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(a)}\ e^{ax}\right\}=e^{ax}\frac{F(a)}{F(a)}=e^{ax},$$

यदि $F(a)\neq 0$ जब $F(a)=0$ हो, इसका नियम अगले अनुच्छेद में प्रतिपादित किया जायेगा।

3.32 $\{F(D)^{-1}\ e^{ax}\ .\ V,$

जहाँ V, X का कोई भी फलन है। सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि—

$$F(D)\ (e^{ax}\ V)=e^{ax}\ F(D+a)\ V$$

हम लीबनीज प्रमेय (Leibnitz's Theorem) का उपयोग करेंगे। जिसकी सहायता से दो फलनों के गुणन का nवां अवकलज ज्ञात किया जा सकता है।

$$D^n(e^{ax}\ .\ V)=(D^n\ e^{ax})\ V+n\ (D^{n-1}\ e^{ax})\ (DV)$$

$$+1/2n\ (n-1)\ (D^{n-2}\ e^{ax})\ (D^2V)+\cdots+e^{ax}\ (D^nV)$$

$$=a^n.e^{ax}.V+n.a^{n-1}\ e^{ax}\ DV+1/2(n)\ (n-1)\ a^{n-2}\ e^{ax}\ D^2V+e^{ax}\ D^nV$$

$$=e^{ax}\ \{a^n+na^{n-1}\ D+1/2\ n(n-1)\ a^{n-2}\ D^2+\cdots+\ D^n\}V$$

$$=e^{ax}\ (D+a)^n.V$$

जहाँ n कोई भी धनात्मक पूर्णांक है। अतः

$$F(D)\{e^{ax} V\}=(D^n+a_1 D^{n1}+\cdots+a_{n-1} D+a_n)(e^{ax} V)$$

$$=e^{ax}\{(D+a)^n+a_1(D+a)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(D+a)+a_n\} V$$

$$=e^{ax} F(D+a) V \quad (2)$$

इससे सुझाव प्राप्त होता है कि

$$\frac{1}{F(D)}(e^{ax}V)=e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V$$

इसकी सत्यता को प्रमाणित करने के लिये हम उपरोक्त सूत्र के दायें पक्ष पर $F(D)$ से संक्रिया करते हैं, तब हमें प्राप्त होगा

$$F(D)\left[e^{ax}\left\{\frac{1}{F(D+a)} V\right\}\right]=e^{ax} F(D+a)\left\{\frac{1}{F(D+a)} V\right\}$$

$$=e^{ax} V$$

(2) के द्वारा चूँकि । $F(D+a)$ एवं $\{F(D+a)\}^{-1}$ प्रतिलोम संक्रियायें हैं।

अतः उपरोक्त सूत्र सत्यापित हुआ।

3.33 अब हम $1/F(D)\, e^{ax}$ का हल प्राप्त करेंगे जबकि $F(a)=0$ इस स्थिति में $(D-a)$ को $F(D)$ का गुणनखण्ड होना चाहिये। मान लो कि

$$F(D)=(D-a)^p\ (a)$$

जहाँ

$$\phi(a)\neq 0$$

अब पिछले अनुच्छेद के सूत्र में $V=1$ लेने पर

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^p}\frac{1}{\phi(D)}\ e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^p}\left\{\frac{e^{ax_1}}{\phi(a)}\right\}$$

चूँकि $\phi(a)\neq 0$

$$=\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{1}{(D+a-a)^p}=1$$

$$=\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{1}{D^p}\cdot 1=\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{X^p}{p^1}$$

यह ध्यान रखना है कि संकारक $1/D$ संकारक D का प्रतिलोम है, अतः संकारक $1/D$ किसी फलन का X के सापेक्ष समाकलन करता है, तथा $1/D^p$ के द्वारा p-बार समाकलन किया जायेगा।

3.34 जब सहायक समीकरण के दो मूल बराबर हो, m_1 एवं m_1, उसको निम्न रूप में लिखा जा सकता है—

$$m^2-2mm_1+m^2{}_1=0$$

इसके संगत मूल अवकल समीकरण होगा—

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2m_1\frac{dy}{dx}+m^2{}_1\,y=0$$

या

$$(D^2-2m_1\,D+m^2{}_1)\,y=0$$

अर्थात्

$$(D-m_1)^2\,y=0 \qquad (3)$$

अनुच्छेद 3.23 में इसे हल किया है, यहाँ उसी हल को प्राप्त करने की विकल्प विधि दी जा रही है।

हमें ज्ञात है कि $y=c_1\,e^{m_1x}$ एक हल है। अब बराबर मूलों के संगत अधिक व्यापक हल जानने के लिये, हम $y=e^{m_1x}\,.\,V$ प्रतिस्थापित करते हैं, जहाँ V, x का फलन है। तब 3.31 के (1) से

$$(D-m_1)^2\,\{e^{m_1x}\,V\}$$

$$=e^{m_1x}(D-m_1+m_1)^2\,V=e^{m_1x}\,D^2\,V$$

अतः समीकरण (3) का रूप होगा

$$D^2V=0$$

हल करने पर

$$V=C_1+C_2x$$

अतः

$$y=(c_1+c_2x)\,e^{m_1x}$$

इसी प्रकार यदि मूल m_1 p बार पुनरावृत्त हुई है, तब समीकरण $(D-m_1)^p$ $y=0$ का रूप होगा

$$D^p\,V=0,$$

जिसका हल होगा

$$V=c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots X\ c\ x^{p-1}$$

तथा

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_px^{p-1})\ e^{m_1x}$$

उदाहरण : हल करो

$$(D^3-2D^2-5D+6)\ y=e^{4x}$$

अर्थात्

$$(D+2)\ (D-1)\ (D-3)\ y=e^{4x}$$

पूरक फलन है

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^x+c_3e^{3x} \tag{i}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D+2)\ (D-1)\ (D-3)}\ e^{4x}$$

$$=\frac{1}{(4+2)\ (4-1)\ (4-3)}\ e^{4x}$$

$$=\frac{1}{18}e^{4x} \tag{ii}$$

अतः (i)+(ii) से सम्पूर्ण समाकल प्राप्त होगा

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^x+c_3e^{3x}+\frac{1}{18}\ e^{4x}$$

(2) हल करो

$$\frac{d^3y}{dx^3}+y=2+e^{-x}+e^{2x}$$

अर्थात्

$$(D+1)\ (D^2-D+1)\ y=2+e^{-x}+e^{2x}$$

सहायक समीकरण के मूल हैं

$$m=-1,\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\right) \tag{i}$$

विशेष समाकल है :

$$y=\frac{1}{D^3+1}\ (2+e^{-x}+e^{2x})$$

$$=\frac{1}{D^3+1}(2e^2+e^{2x})+\frac{1}{(D^2-D+1)(D+1)}e^{-x}$$

$$=2+\frac{e^{2x}}{8+1}+\frac{1}{(-1)^2-(-1)+1}\frac{1}{D+1}e^{-x}$$

$$=2+\frac{e^{2x}}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{D+1}e^{-x}$$

चूँकि $D+1=0$ होगा, जब D को -1 लिखा जायेगा, अतः इस अंतिम पद का मान इस विधि से नहीं निकाला जा सकता। इसके लिये

$$\frac{1}{F(D)}(e^{ax}V)=^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V$$

का प्रयोग करेंगे, $V=1$ मानते हुये। अतः

$$\frac{1}{3}\frac{1}{D+1}(e^{-x}1)=\frac{1}{3}e^{-x}\frac{1}{(D-1)+1}$$

$$=\frac{e^{-x}}{3}\frac{1}{D}1=\frac{e^{-x}}{3}$$

अतः विशेष समाकल है

$$2+1/9\ e^{2x}+1/3\ xe^{-x} \qquad \text{(ii)}$$

तथा (i)+(ii) से संपूर्ण समाकल ज्ञात होगा :

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\right)+2+\frac{e^{2x}}{9}+\frac{1}{3}xe^{-x}$$

(3) $(D-2)^2y=e^x+xe^{2x}$

पूरक फलन है

$$y=(c_1+c_2x)\ e^{2x} \qquad \text{(i)}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D-2)^2}e^x+\frac{1}{(D-2)^2}Xe^{2x}$$

$$=\frac{e^x}{(1-2)^2}+e^2\frac{1}{(D+2-2)^{2x}}x$$

$$y=e^x+e^{2x}\frac{1}{D^2}X$$

$$=e^{x}+e^{2x}\,\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=e^{x}+e^{2x}\frac{X^3}{6} \qquad \text{(ii)}$$

(i)+(ii) से सम्पूर्ण समाकल ज्ञात होगा।

$$y=(c_1+c_2x)\,e^{2x}+e^{x}+\frac{x^3}{6}e^{2x}$$

(4) हल करो :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sin aX$$

या

$$(D^2+a^2)\,y=\sin ax$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax \qquad \text{(i)}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D-ia)\,(D+ia)}\sin ax$$

चूंकि

$$e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$$

अतः

$$y=\frac{1}{(D-ia)\,(D+ia)}\,e^{iax}$$

का अधिकल्पित भाग

$$\frac{1}{D^2+a^2}\,e^{iax}=\frac{1}{(D-ia)}\left(\frac{1}{D+ia}e^{iax}\right)$$

$$=\frac{1}{D-ia}\;\frac{e^{iax}}{2ia}$$

$$=e^{iax}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2ia}\right)$$

$$=e^{iax}\frac{x}{2ia}=\frac{-ix}{2a}\,(\cos ax+i\sin ax)$$

$$=\frac{x}{2a}\sin ax\frac{-ix}{2a}\cos ax \qquad \text{(ii)}$$

अत: विशेष समाकल

$$y=-\frac{x}{2a}\cos ax \qquad \text{(iii)}$$

जो कि (ii) का अधिकल्पित भाग (i)±(iii) से संपूर्ण समाकल है :

$$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax-\frac{x}{2a}\cos ax$$

टिप्पणी : समीकरण $(D^2+a^2)\,y=\cos ax$ का विशेष समाकल (ii) का वास्तविक भाग होगा । अत:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{x}{2a}\sin ax$$

ये दोनों परिणाम अनुच्छेद 3.36 में उपयोगी सिद्ध होंगे ।

प्रश्नावली 23

निम्न समीकरणों का सम्पूर्ण समाकल ज्ञात करो :

1. $(D^2-3D+2)\,y=e^{5x}$
2. $(D^3-2D^2-5D+6)\,y=(e^{2x}+3)^2$
3. $(D^2-1)\,y=e^x$
4. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-y=(e^x+1)^2$
5. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+yx^2e^{-x}$
6. $(D-2)^2\,y=e^{2x/x}x^2$
7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos 2x$
8. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+4y=e^x\cos x$
9. $(D^2+D-2)\,y=e^x$
10. $(D^2-4D+4)\,y=x^3e^{2x}$
11. $(D+2)^2\,y=2\sinh 2x$

3.35 $\{F(D)\}^{2-1} \sin ax$ एवं $\{F(D)\}^{-1} \cos ax$

$\sin ax$ के उत्तरोत्तर अवकलन (successive differentiation) से हमें प्राप्त होगा :

$$D \sin ax = a \cos ax$$

$$D^2 \sin ax = -a^2 \sin ax$$

$$D^3 \sin ax = -a^3 \cos ax$$

$$D^4 \sin ax = +a^4 \sin ax = (-a^2)^2$$

....

व्यापक रूप से

$$(D^2)^n \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$$

अत:

$$F(D^2) \sin ax = \{D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n\} \sin ax$$

$$= \{(-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n1} + \ldots + a_{n-1} (-a^2) + a_n\} \sin ax$$

$$= F(-a^2) \sin ax$$

इसी प्रकार

$$F(D^2) \cos ax = F(-a^2) \cos ax \quad (1)$$

इससे सुझाव प्राप्त होता है कि

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax \quad (2)$$

यदि

$$F(-a^2) = 0$$

इसको सत्यापित करने के लिये हम दायें पक्ष पर $F(D^2)$ से संक्रिया करने पर पाते हैं ।

$$F(D) \left\{ \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax \right\} = \frac{1}{F(-a^2)} \{F(D^2) \sin ax\},$$

चूँकि $1/F(-a^2)$ एक अचर है,

$$= \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \sin ax,$$

(1) के द्वारा

$$= \sin ax$$

यदि $F(D)$ में D की विषम घातें भी अंतर्विष्ट हैं, तब

$$F(D)=F_1(D^2)+DF_2(D^2),$$

तब

$$\frac{1}{F(D)}\sin ax=\frac{1}{F_1(D^2)+DF_2(D^2)}\sin ax$$

$$=\frac{1}{F_1(-a^2)+DF_2\,(-a^2)}\sin ax$$

(2) के द्वारा

$$=\frac{1}{p+qD}\sin ax,$$

मान लो

$$=(p-qD)\left\{\frac{1}{p-qD}\left(\frac{1}{p+qd}\sin ax\right)\right\},$$

चूँकि

$$p-qD \text{ एवं } 1/(p-qD)$$

प्रतिलोम संक्रियाएँ हैं :

$$=(p-qD)\left\{\frac{1}{p^2-q^2D^2}\sin ax\right\}$$

$$=(p-qD)\left\{\frac{1}{p^2-q^2a^2}\sin ax\right\}$$

$$=p\,\frac{\sin ax-qa\cos ax}{p+q^2a^2}$$

इसी प्रकार हम $\cos ax$ के लिये सिद्ध कर सकते हैं।

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=\frac{1}{F(-a^2)}\cos ax$$

उपरोक्त नियमों को अधिक व्यापक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(-a)^2}\sin(ax+b)$$

एवं

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)$$

3.36 अपवादभूत स्थिति (exceptional case)

यदि D^2+a^2 $F(D)$ का गुणनखण्ड है, तब D^2 के स्थान पर $-a^2$ प्रति-

स्थापित करने पर विशेष समाकल का हर शून्य हो जायेगा, अत: पिछले अनुच्छेद की विधि अनुपयुक्त होगी ।

यदि

$$F(D)=(D^2+a^2)\phi(D),$$

जहाँ

$$\phi(a)\neq 0,$$

तब $\{F(D)\}^{-1}\sin ax$ का मान ज्ञात करने के लिये हम सर्वप्रथम $(D^2+a^2)^{-1}$ $\sin ax$ का मान निकालेंगे, फिर उसके परिणाम पर संकारक $\{\phi(D)\}^{-1}$ से संक्रिया करेंगे ।

अनुच्छेद 3.34 के पश्चात दिये साधित उदाहरण 4 में हम यह परिणाम सिद्ध कर चुके हैं :

$$\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax=\frac{-X}{2a}\cos ax$$

एवं

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{X}{2a}\sin ax$$

उदाहरण : हल करो :

$$(D^4+10D^2+9)\,y=\cos(2x+5)$$

अर्थात

$$(D^2+1)\,(D^2+9)\,y=\cos(2x+5)$$

सहायक समीकरण है

$$(m^2+1)\,(m^2+9)=0,$$

जिसके मूल हैं

$$m=\pm i,\ \pm 3i$$

अत पूरक फलन है

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x \qquad \text{(i)}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{(D^2+1)\,(D^2+9)}\cos(2x+5)$$

$$=\frac{1}{(-4+1)\,(-4+9)}\cos(2x+5)$$

$$=-\frac{1}{15}\cos(2x+5) \qquad \text{(iii)}$$

संपूर्ण समाकल (i)+(ii) से प्राप्त होगा।

$$y=c_1 \cos x+c_3 \sin x+c_3 \cos 3x+c_4 \sin 3x-1/15 \cos (2x+5)$$

(2) $(D^2+3D+2)\, y=\cos 2x$

अर्थात

$$(D+1)(D+2)\, y=\cos 2x$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x} \tag{i}$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D^2+3D+2} \cos 2x$$

$$=\frac{1}{-4+3D+2} \cos 2x=\frac{1}{3D-2} \cos 2x$$

अब हर में D^2 प्राप्त करने के लिये हम निम्न विधि अपनाते हैं

$$\frac{1}{3D-2}=\frac{(3D+2)}{(3D-2)\,(3D+2)}=\frac{3D+3}{9D^2-4},$$

अतः

$$\frac{3D+2}{9D^2-4}\cos 2x=\frac{3D+2}{-36-4} \cos 2x$$

$$=\frac{-1}{40}(3D \cos 2x+2 \cos 2x)$$

$$=\frac{-1}{40}(-6 \sin 2x+2 \cos 2x)$$

$$=\frac{1}{20}(3 \sin 2x-\cos 2x) \tag{ii}$$

अब (i)+(ii) संपूर्ण समाकल प्राप्त होगा :

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{20}(3 \sin 2x-\cos 2x)$$

विकल्प विधि : विशेष समाकल निम्न विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है

$$y=\frac{1}{(D+1)(D+2)}\cos 2x$$

$$=\frac{(D-1)(D-2)}{(D^2-1)(D^2-4)}\cos 2x$$

$$=\frac{D^2-3D+2}{(-4-1)(-4-4)}\cos 2x$$

$$=1/40\ \{D^2\cos 2x-3D\cos 2x+2\cos 2x\}$$

$$=1/40\ \{-4\cos 2x+6\sin 2x+2\cos 2x\}$$

$$=1/20\ (3\sin 2x-\cos 2x)$$

(3) $(D^2-2D+4)y=e^x\cos x$

सहायक समीकरण है $m^2-2m+40=,$ अत: $m=1\pm i\sqrt{3}$

पूरक फलन है

$$e^x(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin x\sqrt{3}) \quad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D^2-2D+4}e^x\cos x$$

$$=e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+4}\cos x$$

$$=e^x\frac{1}{D^2+3}\cos x$$

$$=e^x\frac{1}{-1+3}\cos x=1/2\ e^x\cos x \quad (ii)$$

अत: $(i)+(ii)$ से समाकल प्राप्त होगा—

$$y=e^x(c_1\cos x\sqrt{3}+c_2\sin x\sqrt{3})+1/2\ e^x\cos x$$

(4) $(D^2+4)y=\cos 2x+\cos 4x$

पूरक फलन है

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x \quad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D^2+4}(\cos 2x+\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{D^2+4}\cos 2x+\frac{1}{D^2+4}\cos 4x$$

अब

$$\frac{1}{D^2+4}\cos 4x=\frac{1}{-16+4}\cos 4x=-\frac{1}{12}\cos 4x$$

हमें ज्ञात है कि

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{x}{2a}\sin ax$$

अत:

$$\frac{1}{D^2+4}\cos 2x=X/4\sin 2x$$

विशेष समाकल है

$$y=X/4\sin 2x-1/12\cos 4x \qquad (ii)$$

अत: $(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल होगा

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+1/4\ x\sin 2x\ 1/12\cos 4x$$

प्रश्नावली 24

संपूर्ण समाकल ज्ञात करो

1. $(D^2+3D-4)y=\sin 2x$
2. $(D^3+D^2+D+1)y=\cos 3x$
3. $(D^4+2D^3-3D^2)y=e^{2x}+4\sin x$
4. $(D^2-4D+3)y=e^x\cos 2x$
5. $(D^3+6D^2+11D+6)y=2\sin 3x$
6. $(D^2-2D+5)y=e^{2x}\sin x$
7. $(D^3+1)y=\cos x$
8. $(D^2-1)y=\cosh x\cos x$

   (संकेत $\cosh x=e^x+e^{-x}/2$ रखो)
9. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\sin 2x$
10. $\frac{d^4y}{dx^4}-y=\sin 2x$

3.37 $\{F(D)\}^{-1}X^m$,

जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है ।

पहिले हम $(D-a)^{-1}X^m$ का मान निकालते हैं । अनुच्छेद 3.26 से हमें ज्ञात है पुनरावृत्त खंडश: समाकलन द्वारा

$$(D-a)^{-1}\, x^m = e^{ax}\int e^{-ax},\, x^m\, dx$$

$$= e^{ax}\left\{ \frac{-x^m e^{-ax}}{a} - mx^{m-1}\frac{e^{-ax}}{a^2} - \dots \frac{m(m-1)}{a^{m+1}} \dots 2.1.e^{-ax} \right\} \quad (1)$$

लेकिन यदि हम $1/(D-a)$ का विस्तार D आरोही घातों में करें, तो हमें प्राप्त होगा ।

$$(D-a)^{-1}x^m = -\frac{1}{a(1-D/a)}X^m$$

$$= -1/a(1+D/a+D^2/a^2+D^3/x^3+\dots)X^m$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{ X^m + \frac{mx^{m-1}}{a} + \frac{m(m-1)}{a^2}X^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)}{a^m}3.2.1 \right\}$$

जो कि (1) के समान ही है । हमने 3.26 में देखा ही है कि $1/F(D)$ को आंशिक भिन्नों में वियोजित किया जा सकता है, एवं हम प्रत्येक आंशिक भिन्न को D की घातों में विस्तार कर सकते हैं । हमें यह भी ज्ञात है कि $\{F(D)\}^{-1}$ का D की घातों में विस्तार वहीं होगा, यदि हम पहिले उसे आंशिक भिन्नों में वियोजित कर लें फिर प्रत्येक पद का विस्तार करें या उसका विस्तार किसी अन्य विधि से करें । अत: $\{F(D)\}^{-1}X^m$ का मान ज्ञात करने के लिये, हमें किसी भी विधि से $\{F(D)\}^{-1}$ का D की घातों में विस्तार प्राप्त करना है एवं इस विस्तार से हम x^m पर संक्रिया करेंगे । चूंकि x^m के वे अवकल गुणांक जिनकी कोटि m से अधिक है, शून्य होते हैं, अत: विशेष समाकल में पदों की संख्या परिमित होती है ।

उदाहरण

(1) हल करो

$$(D^2+4)y = x^2$$

सहायक समीकरण है—

$$m^2+4=0$$

$$m^2+4=0$$

अत:

अत: पूरक फलन है

$$y=c_1 \cos 2x+c_2 \sin 2x \qquad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D^2+4}x^2$$

$$=1/4\ (1+D^2/4)^{-1}X^2$$

$$=1/4\ (1-D^2/4+1/16\ D^4-\ldots)\ X^2$$

$$=1/4(X^2-2/4) \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल ज्ञात होता है।

$$y=c_1 \cos 2x+c_2 \sin 2x+1/4\ (x-1/2)$$

(2) हल करो

$$(D^3-2D+4)y=X^4+3x^2-5x$$

अर्थात

$$(D+2)\ (D^2-2D+2)y=x^4+3x^2-5x$$

सहायक समीकरण के मूल हैं

$$m=-2,\ 1\pm i$$

अत: पूरक फलन है

$$y=e_1e^{-2x}+e^x(c_2 \cos x+c_3 \sin x) \qquad (i)$$

विशेष समाकल है—

$$y=\frac{1}{D^3-2D+4}(x^4+3x^2-5x)$$

अब

$$(D^2-2D+4)^{-1}=1/4\{1-(1/2\ D-D^3/4)\}^{-1}$$

$$=1/4\ \{1+(1/2\ D-D^3/4)+(1/2\ D-D^3/4)^2+(1/2\ D-D^3/4)^3 +(1/2\ D-D^3/4)^4\}$$

$$=1/4\ \{1+1/D-D^3/4+1/4\ D^4-1/4\ D^4+1/8\ D^3+1/16\ D^4+\ldots+\}$$

इस विस्तार में केवल D^4 तक पद लिये हैं

$$=1/4\ \{1+1/2\ D+1/4\ D^2-1/8\ D^3-3/14\ D^4\}$$

अत:

$$y=(1/4+1/8\ D+1/16\ D^2-1/32\ D^3-3/64)^4\ (x^4+3x^2-5x)$$

समाकलन करके सरल करने पर

$$y=1/4\ x^4+1/2\ x^3+3/2\ x^2-5/4\ x-11/8 \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से हमें संपूर्ण समाकल ज्ञात होता है

$$y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos x+c_3\sin x)$$
$$+1/4\ x^4+1/2\ x^3+3/2\ x^2-5/4\ x-11/8$$

(3) हल करो

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=Xe^{2x}$$

पूरक फलन है

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \qquad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D^2+1}Xe^{2x}$$

$$=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}x$$

3.32 के द्वारा

$$=e^{2x}\frac{1}{5+4D+D^2}x$$

$$=e/5^{2x}(1+4/5D+1/5D^2)^{-2}X$$

$$=e^{2x}/5(1-4/5D+\dots)X$$

$$=e^{2x}/5(x-4/5)=e^{2x}/25(5x-4) \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से हमें संपूर्ण समाकल प्राप्त होता है

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+e^{2x}/25(5x-4)$$

(4) $(D^3-4D^2+3D)y=X^2$

या

$$D(D-1)(D-3)y=x^2$$

अतः पूरक फलन है

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{3x} \qquad (ii)$$

विशेष समाकल है

$$y=\frac{1}{D(D^2-4D+3)}X^2$$

$$1/D.1/3(1-4D/3+1D^2/3)^{-1}X^2$$
$$=D^{-1}(1/3+4D/9+13/27\ D^2+\ldots)X^2$$
$$=(1/3\ D^{-1}+4/9+13/27\ D)X^2$$
$$=x^3/9+4/9\ x^2+26|27\ x \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल ज्ञात होता है

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{3x}+1/9\ x^3+4/9\ x^2+26/27\ x$$

3.38 $\{F(D)\}^{-1}xV$, जहा V, x का कोई फलन है

लीबनीज् प्रमेय (Leibnitz's theorem) से

$$D^n(x.\ V)=XD^nV+nD^{n-1}V$$
$$=XD^nV+\left(\frac{d}{dD}\ D^n\right)V$$

चूँकि $F(D)$, D का एक बीजीय फलन है, हमें प्राप्त होगा

$$F(D)\ (x.V)=XF(D)V+F'(D)V \qquad (i)$$

प्रतिलोम संकारक $1/F(D)$ के लिये संगत सूत्र निम्न रूप से निकाला जा सकता है

सूत्र (1) में $F(D)V=V_1$ प्रतिस्थापित करो

तब

$$V=\frac{1}{F(D)}V_1$$

चूँकि V, x का कोई भी फलन है, V_1 भी x का कोई भी फलन है। अब (1) का रूप होगा

$$F(D)X\frac{1}{F(D)}V_1=xV_1+F'(D)\frac{1}{F(D)}V_1$$

दोनो पक्षों को $1/F(D)$ से संक्रिया करने पर एवं पक्षान्तर द्वारा प्राप्त होगा

$$\frac{1}{F(D)}XV_1=X\frac{1}{F(D)}V_1-\frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2}V_1$$

इसी सूत्र को V के पदों में लिखने पर

$$\frac{1}{F(D)}xV = X\frac{1}{F(D)}V + \left\{\frac{d}{dD}\frac{1}{F(D)}\right\}V$$

इसी को और व्यापक बनाकर $X^r V$ के संगत जहाँ r धनात्मक पूर्णांक है, विशेष समाकल का सूत्र ज्ञात किया जा सकता है, किन्तु वह अधिक सुविधाजनक नहीं होता।

उदाहरण
हल करो

$$(D^2-1)y = xe^{3x}$$

पूरक फलन है

$$y = c_1e^x + e_2e^{3x}$$

विशेष समाकल है

$$y = \frac{1}{D^2-1}Xe^{3x}$$

चूंकि समीकरण का दायां पक्ष xV प्रकार का है, अतः पिछले अनुच्छेद के सूत्र का उपयोग करने पर

$$y = X\frac{1}{D^2-1}e^{3x} - \frac{2D}{(D^2-1)^2}e^{3x}$$

$$= x\ 1/8\ e^{3x} - 1/8^2\ (2D)e^{3x}$$

$$= 1/8\ Xe^{3x} - 1/32.(3e^{3x})$$

$$y = 1/32\ e^{3x}(4x-3) \qquad (ii)$$

$(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल है

$$y = e_1e^x + c_2e^{-x} + 1/32\ e^{3x}(4x-3)$$

(2) हल करो

$$(D^2+3D+2)y = x \sin 2x$$

पूरक फलन है

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} \qquad (i)$$

विशेष समाकल है

$$y = \frac{1}{(D^2+3D+2)}x \sin 2x$$

$$= X\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x - \frac{2D+3}{(D^2+3D+2)^2}\sin 2x$$

$$=X.\frac{1}{-4+3D+2}\sin 2x-\frac{2D+3}{(-4+3D+2)^2}\sin 2x$$

$$=X.\frac{1}{3D-2}\sin 2x-\frac{2D+3}{(3D-2)^2}\sin 2x$$

$$=X.\frac{3D+2}{9D^2-4}\sin 2x\ \frac{(2D+3)}{9D^2-12D+4}\sin 2x$$

$$=X\frac{3D+2}{9(-4)-4}\sin 2x-\frac{2D+3}{9(-4)-12D+4}\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{40}X(6\cos 2x+2\sin^2 x)+\frac{1}{4}\frac{2D+3}{3D+8}\sin 2x$$

$$=-\frac{X}{20}(3\cos 2x+\sin 2x)+\frac{1}{4}\frac{(2D+3)(3D-8)}{9D^2-64}\sin 2x$$

$$=-X/20(3\cos 2x+\sin 2x)+\frac{1}{4}\frac{6D^2-7D-24}{9(-4)-64}\sin 2x$$

$$=-\frac{X}{20}(3\cos 2x+\sin 2x)+\frac{1}{200}(24\sin 2x+7\cos 2x)\quad(ii)$$

$(i)+(ii)$ से संपूर्ण समाकल ज्ञात होता है ।

$$y=c_1c^{-x}+c_2e^{-2x}-1/200\,(30x-7)\cos 2x-1/100\,(5x-12)\sin 2x$$

प्रश्नावली 25

समीकरणों का संपूर्ण समाकल ज्ञात करो—

1. $(D^2+4)y=X^2$

2. $\frac{dy}{dx^2}\ 5-\frac{dy}{dx}+6y=X$

3. $(D^2+3D^2+2D)y=X^2$

4. $(D^2+2D+1)y=x\cos x$

5. $\frac{d^3y}{dx^3}+8y=X^4+2x+1$

6. $(D^2--2D+1)y=X\sin X$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = Xe^x \sin x$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin^{2x}$

9. $D^2(D^2+4)y = 48 X^2$

10. $(D^2 - 4D + 3)y = 2 Xe^{3x}$

विविध प्रश्नावली 26

समीकरणों का संपूर्ण समाकल ज्ञात करो—

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x + e^{2x}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2p \frac{dy}{dx} + p^2y = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \sinh x$

4. $(D^2+4)y = \sin 2x$

5. $(D-1)^3 y = 8e^{3x}$

6. $(D^2+2D+4)y = e^x \sin 2x$

7. $(D^2+D-2)y = e^x$

8. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} = 1 + x^2$

9. $(D^2-3D+2)y = \sin 3x$

10. $(D^2+D+1)^2(D-2)y = 0$

11. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = e^x \cos x$

12. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - y = xe^x$

13. $(2D^2+2D+3)y = x^2 + 2x$

14. $(D^2+9)y=x \cos x$

15. $(D^2-6D+13)y=4e^{3x} \sin 2x$

16. $(D^4+8D^2+16)y=\cos^2 X$

17. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-y=x \sin x$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=X \sin x+(1+x^2)e^x$

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+4y=2 \cosh 2x$

20. $(D^2-1)y=x^2 \sin 3x$

21. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

22. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2p\dfrac{dy}{dx}+p^2y=B \cos kx$

23. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+y=e^{x/2} \sin x\sqrt{3}/2$

24. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-7\dfrac{dy}{dx}-6y=e^{2x}(1+x)$

25. $(D^4+2D^2+1)y=X^2 \cos x$

26. निम्न अवकल समीकरण को हल करो—

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=1,$$

प्रतिबन्ध दिया है कि जब

$$x=0,\ y=0,$$

एवं जब

$$X\to\infty$$

y परिमित सीमा को अग्रसर होता है।

17. दर्शाओ कि समीकरण $(D^{2n+1}-1)y=0$, के हल में एक पद Ae^x है एवं निम्न रूप के पदों के n युग्म है

$$e^{cx}(B_r \cos sx+C_r \sin sx),$$

तथा

$$S=\sin\frac{2\pi\gamma}{2n+1}$$

जहाँ

$$C\cos\frac{2\pi\gamma}{2n+1}$$

$$\gamma=1, 2, 3 \ldots n.$$

3.4 प्राचल विचरण विधि (Method of Variation of Parameters)

अब हम अन्तिम विधि पर प्रकाश डालते हैं। यदि रैखिक समीकरण का पूरक फलन ज्ञात हो, तो इस विधि द्वारा उसका सम्पूर्ण समकल ज्ञात किया जा सकता है। यहाँ केवल अचर गुणांकों वाले अवकल समीकरण का इस विधि से हल ज्ञात किया जायेगा, परन्तु यह विधि चर गुणांकों वाले अवकल समीकरण पर भी प्रभावकारी है।

मान लो

$$y_2+py_1+qy=R \tag{1}$$

द्वितीय कोटि का समीकरण है (y_1 एवं y_2 y के क्रमश: प्रथम एवं द्वितीय अवकल गुणांकों को दर्शा रहे हैं; यही संकेत सभी चरों के अवकलजों के लिये लिखा जायेगा) मान लो समीकरण (1) का पूरक फलन ज्ञात है (या कि ज्ञात किया जा सकता है)

$$y=au+bv,$$

जहाँ a एवं b अचर हैं, तथा u एवं v (1) के दो एकघाती स्वतन्त्र हल हैं।

$$\left.\begin{aligned} &\text{अत:} && u_2+pu_1+qu=0 \\ &\text{इसी प्रकार} && v_2+pv_1+qv=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

मान लो

$$y=Au+Bv \tag{3}$$

अभीष्ट सम्पूर्ण समाकल है, जहाँ A एवं B, x के कोई फलन है, जिनके मान हमें ज्ञात करना है।

(3) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा

$$y_1=Au_1+Bv_1+(A_1u+B_1v) \tag{4}$$

हम फलन A एवं B का चुनाव ऐसा करेंगे कि

$$A_1u+B_1v=0 \tag{5}$$

तब (4) से हमें प्राप्त होगा

$$y_1=Au_1+Bv_1 \tag{6}$$

(6) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$y_1=Au_2+Bv_2+(A_1u_1+B_1v_1) \tag{7}$$

y, y_1 एवं y_2 के मान क्रमशः (3), (6) एवं (7) से (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$Au_2Bv_2+(A_1u_1+B_1v_1)+p(Au_1+Bv_1)+q(Au+Bv)=R$$

पुनर्विन्यास करने पर

$$A(u_1+pu_1+qu)+B(v_2+pv_1+qv)+A_1u_1+B_1v_1=R$$

अब (2) की सहायता से हमें प्राप्त होगा

$$A_1u_1+B_1v_1=R \tag{8}$$

अब (5) और (8) को हल करके A_1 एवं B_1 के मान निम्न रूप में प्राप्त करेंगे—

$$\frac{A_1}{v}=\frac{B_1}{-u}=\frac{R}{vu_1-uv_1}$$

अतः

$$A_1=\frac{vR}{vu_1-uv_1},$$

समाकलन करने पर

$$A=\int\frac{vR}{vu_1-uv_1}\,dx+c_1=f(x)+c_1, \text{ मान लो}$$

तथा

$$B=\int\frac{-uR}{vu_1-uv_1}\,dx+c_2=\phi(x)+c_2$$

अन्त में A एवं B के मान (3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें सम्पूर्ण समाकल ज्ञात होता है—

$$y=(f(x)+c_1)u+(\phi(x)+c_2)v$$

$$=(c_1u+c_2v)+\{uf(x)+v\phi(x)\}$$

टिप्पणी : यह विधि गणितज्ञ लैगरेंज Lagrange* के द्वारा प्रतिपादित की गई। इसकी सहायता से तीन या उससे अधिक कोटि के अवकल समीकरण को भी हल किया जा सकता है; लेकिन तब युगपत समीकरणों की संख्या अधिक बढ़ जाने से उनको हल करना बहुत क्लिष्ट होता है।

उदाहरण : 1 समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=a \sec ax$$

को प्राचल विचरण विधि से हल करो।

सहायक समीकरण है

$$m^2+a^2=0, m=\pm ia$$

अत: पूरक फलन है

$$y=c_1 \cos ax+c_2 \sin ax$$

मान लो

$$u=\cos ax, v=\sin ax$$

मान लो

$$y=A \cos ax+B \sin ax$$

दिये हुये समीकरण का सम्पूर्ण समाकल हैं, जहाँ A व B, X के फलन हैं।

तब प्राचल विचरण विधि के अनुसार हमें A_1 एवं B_1 जहाँ $A_1=dA/dx$ तथा $B_1=dB/dx$ के मान निम्न समीकरणों से ज्ञात करना होगा—

$$\frac{A_1}{\sin ax}=\frac{B_1}{-\cos ax}=\frac{a \sec ax}{-a \sin^2 ax-a \cos^2 ax}=-\sec ax$$

अत:

$$A_1=-\frac{\sin ax}{\cos ax}=\frac{dA}{dx}$$

*जोसेफ लुईस लैगरेंज (Joseph Louis Lagrange), (1736-1813) विश्व के महानतम गणितज्ञों में से एक थे। उन्होंने अवकल समीकरणों पर बहुत लिखा, तथा एकघाती आंशिक समीकरण के सिद्धान्त को सर्वप्रथम उन्होंने ही प्रतिपादित किया। 1774 में उन्होंने विचित्र हल के सम्बन्ध में लिखा; तथा 1779 एवं 1785 के लेखों में प्राचल विचरण विधि का प्रतिपादन किया।

अर्थात्

$$dA = -\frac{(-\sin ax)}{\cos ax}\,dx$$

समाकलन करने पर

$$A = \frac{1}{a}\log\cos a\,x + c_1$$

इसी प्रकार

$$B_1 = \frac{dB}{dx} = 1$$

अतः

$$B = x + c_2$$

अतः सम्पूर्ण समाकल होगा—

$$y = \left(\frac{1}{a}\log\cos ax + C_1\right)\cos ax + (X + C_2)\sin ax$$

$$= (c_1\cos ax + c_2\sin ax) + \frac{1}{a}\cos ax\log\cos ax + X\sin ax$$

प्रथम कोष्टक में पूरक फलन है, शेष विशेष समाकल है।

(2) हल करो

$$(D^2 - 2D)y = e^x \sin x$$

सहायक समीकरण है

$$m(m-2) = 0$$

अतः पूरक फलन है

$$y = c_1 + c_2 e^{2x}$$

मान लो

$$u = 1,\ v = e^{2x}$$

तथा

$$y = A + Bc^{2x}$$

तब प्राचल विचरण विधि के अनुसार हमें A_2 एवं B_1 जहाँ $A_1 = dA/dx$ तथा $B_1 = dB/dx$ के मान निम्न समीकरणों से ज्ञात करना है

$$\frac{A_1}{e^{2x}} = \frac{B_1}{-1} = \frac{e^x \sin x}{-2a^{2x}}$$

अतः

$$A_1 = \frac{dA}{dX} = -\frac{1}{2}e^x \sin x$$

एवं

$$B_1 = \frac{dB}{dx} = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x$$

अतः

$$A = \int -\frac{1}{2} e^{x} \sin x dx = -\frac{1}{4} e^{x} (\sin x - \cos x) + C_1$$

एवं

$$B = \int \frac{1}{2} e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{4} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C_2$$

सम्पूर्ण समाकल होगा—

$$y = Au + Bv$$

$$= -\frac{1}{4} e^{x} (\sin x - \cos x) + C_1 + \left\{C_2 - \frac{1}{4} e^{-x} \sin x + \cos x)\right\} e^{2x}$$

$$= (C_1 + C_2 e^{2x}) - \frac{1}{2} e^{x} \sin x$$

(3) समीकरण

$$(D^2 + 4)y = 4 \tan 2x$$

को प्राचल विवरण की विधि से हल करो।

हल : पूरक फलन है

$$y = C_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

मान लो सम्पूर्ण समाकल है

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

जहाँ A एवं B, x के फलन हैं। तब प्राचल विधि के अनुसार हमें $A_1 = dA/dx$ तथा $B_1 = dB/dX$ के मान निम्न समीकरणों से ज्ञात करना है।

$$\frac{A_1}{\sin 2x} = \frac{B_1}{-\cos 2x} = \frac{4 \tan 2x}{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)} = 2 \tan 2x$$

अतः

$$A_1 = \frac{dA}{dx} = 2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}$$

अर्थात्

$$A = 2 \int \frac{(1 - \cos^2 2x) dx}{\cos 2x}$$

$$= 2 \int (\sec 2x - \cos 2x) \, dx$$

$$=\log(\sec 2x+\tan 2x)-\sin 2x+c_1$$

तथा

$$B_1=\frac{dB}{dx}=-2\sin 2x$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$B=\cos 2x+c_2$$

अतः सम्पूर्ण समाकल होगा—

$$y=\{\log(\sec 2x+\tan 2x)-\sin 2x+c_1\}\cos 2x+(\cos 2x+c_2)\sin 2x$$

$$=(C_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\cos 2x\log(\sec 2x+\tan 2x)$$

(4 $(D^3+D)y=\text{cosec } x$

अ)र्थात्

$$D(D^2+1)y=\text{cosec } x$$

पूरक फलन है

$$y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

मान लो सम्पूर्ण समाकल है

$$y=A+B\cos x+C\sin x, \tag{1}$$

जहाँ A, B, C, X के फलन हैं। (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$y=(-B\sin x+C\cos x)+(A_1+B_1\cos x+C_1\sin x)$$

A, B, C का चुनाव हम ऐसा करेंगे कि

$$A_1+B_1\cos x+C_1\sin x=0 \tag{2}$$

अतः

$$y_1=-B\sin x+C\cos x$$

अवकलन करने पर

$$y_2=(-B\cos x-C\sin x)+(C_1\cos x-B_1\sin x)$$

A, B, C का चुनाव हम ऐसा करेंगे कि—

$$C_1\cos x-B_1\sin x=0 \tag{3}$$

तब

$$y_2=-B\cos x-C\sin x$$

अतः

$$y_3=B\sin x-C\cos x-(B_1\cos x+C_1\sin x)$$

अब y_1, y_2, y_3 के मान समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा—

$$-(B_1 \cos x + c_1 \sin x) = \operatorname{cosec} x \quad (4)$$

समीकरण (2), (3), (4) को हल करने पर हमें A_1, B_1, C_1 प्राप्त होंगे।

(2)+(4) से प्राप्त हुआ:

$$A_1 = \frac{dA}{dx} = \operatorname{cosec} x$$

अत:

$$A = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C_1$$

(3) एवं (4) से प्राप्त होता है,

$$C = \frac{dc}{dx} = -1,$$

$$\therefore \quad C = -x + c_3$$

तब (3) से

$$B_1 = \frac{dB}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

अत:

$$B = -\log \sin x + C_2$$

A, B, C के मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हल

$$y = (C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x) - \log(\operatorname{cosec} x + \cot x) - \cos x \log \sin x - x \sin x.$$

प्रश्नावली 27

निम्न अवकल समीकरणों को प्राचल विचरण की विधि से हल करो—

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x,$
2. $(D^2 + 2)y = e^x + 2$
3. $(D^2 + 4)y = 4 \sec^2 2x$
4. $(D^2 - 6D + 9)y = \frac{e^{3x}}{x^2}$
5. $(D^2 + 4)y = X^2 \sin 2x$
6. $(D^3 + D)y = \tan x$
7. $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = e^{2x}$

भाग ब

गति विज्ञान

Dynamics

अध्याय 4

शुद्ध गतिकी एवं बलगतिकी
(Kinematics and Kinetics)

4.1 हमारे दैनिक जीवन में हमें जिन वस्तुओं की अनुभूति होती है वे विराम अवस्था अथवा गतिमान अवस्था में ही होती हैं। विराम अवस्था तथा गतिमान अवस्था का अध्ययन विज्ञान की जिस शाखा के अन्तर्गत किया जाता है, उसे यांत्रिकी (mechanics) कहते हैं। इसकी दो शाखायें हैं—

(i) स्थिति विज्ञान (Statics) यांत्रिकी की इस शाखा में कणों अथवा पिण्डों की विरामावस्था का अध्ययन किया जाता है।

(ii) गतिविज्ञान (Dynamics) यांत्रिकी की इस शाखा में वस्तुओं की गतिमान अवस्था का अध्ययन किया जाता है।

गति विज्ञान को दो भागों में विभाजित किया गया है।

(A) शुद्ध गतिकी (Kinematics)

गति विज्ञान की इस शाखा में, गति उत्पादकों कारणों पर विचार किये बिना, केवल कण अथवा पिंड की गति का ज्यामितीय अध्ययन किया जाता है।

(B) बलगतिकी (Kinetics)

गति विज्ञान की इस शाखा में गति उत्पादक कारणों सहित गति का अध्ययन किया जाता है।

4.11 (A) शुद्ध गतिकी : गति की ज्यामिति (Geometry of motion) विराम और गति की धारणा (Concept of Rest and Motion) जब हम यह ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं कि कोई वस्तु विरामावस्था में है या गतिमान है, तो हम यह जानने की चेष्टा करते हैं कि वह वस्तु हमारे समीपस्थ वस्तुओं के सापेक्ष अपना स्थान बदलती है या नहीं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि कोई वस्तु गतिमान है कि नहीं, यह दूसरे पिंडों के सापेक्ष ही जाना जाता है जिन्हें हम स्थिर मान लेते हैं। सामान्यतः पृथ्वी को ही स्थिर मानकर हम गति अथवा विरामावस्था का अध्ययन करते हैं; यद्यपि हम जानते हैं कि पृथ्वी अपनी धुरी पर घूम रही है एवं सूर्य के चारों ओर चक्कर भी लगा रही है। स्पष्ट है कि विश्व में निरपेक्ष गति (absolute motion) अथवा निरपेक्ष विरामावस्था (absolute rest) की केवल कल्पना ही की जा सकती है।

अतः यदि कोई पिण्ड अपने समीपस्थ पिंडों के सापेक्ष अपनी स्थिति परिवर्तित करता है, तो यह गतिमान कहलाता है।

विस्थापन (Displacement)

यदि कोई कण किसी विशेष क्षण पर किसी बिंदु P पर है और तत्पश्चात् एक समय अन्तराल के बाद के क्षण पर वह बिंदु Q पर है, तब यह सीधी दूरी उस अन्तराल में कण का विस्थापन कहलाता है। यह एक सदिश राशि है; विस्थापन परिमाण में लम्बाई PQ के तुल्य है, तथा दिशा P से Q की ओर है। इसे $\overrightarrow{PQ}$ द्वारा भी निरूपित किया जाता है, जिससे कि उसके सदिश होने का बोध हो सके।

4.12 सरल रेखा में गति : वेग एवं वेगवृद्धि

मान लो सरल रेखा पर एक स्थिर बिंदु O है जिसके सापेक्ष हम गतिमान कण की गति का अध्ययन करेंगे—

मान लो गतिमान बिंदु किसी विशेष क्षण पर P पर स्थित है, एवं उसके किसी आगामी क्षण पर Q पर स्थित है, तब उस समय अन्तराल में उसका विस्थापन PQ होगा । यदि P से Q तक गति करने में समय t लगा है, तब PQ/t कण उस अन्तराल का माध्य वेग (average velocity) होगा, क्योंकि यह विस्थापन की माध्य दर दर्शाता है । यदि यह भिन्न (quotient) अचर है, तब हम कहते हैं कि कण एकसमान (uniform) वेग से गतिमान है । अतः सरल रेखा में गति करते हुए यदि कण तुल्य समय के अन्तराल में हमेशा तुल्य दूरी चलता है, तब वह एकसमान वेग से गतिमान होता है । इस स्थिति में माध्य वेग एवं एकसमान वेग बराबर होते हैं । किन्तु यदि वेग परिवर्तनशील है, तब ये दोनों बराबर नहीं होते ।

परिभाषा : किसी कण के विस्थापन की दर को वेग कहते हैं

मान लो कि कोई कण सरल रेखा OX पर बिंदु O से गति प्रारम्भ करता है, तथा t समय के पश्चात् बिंदु O पर आता है, जहाँ $OP=x$; इसके पश्चात् न्यून समय अन्तराल δt में वह अल्प दूरी δx चलाता है, यदि वह बिंदु Q पर है, तब $PQ=\delta x$ स्पष्ट है कि $\delta x/\delta t$ कण का δt अन्तराल में माध्य वेग होगा । समय अन्तराल δt जब छोटा से छोटा होता जायेगा, उसके संगत विस्थापन δx भी छोटा होता जायेगा । अन्त में जब Q, P की ओर अग्रसर होगा, $\delta x/\delta t$ से विस्थापन की दर ज्ञात होगी । अतः इस भागफल (quotient) की सीमा जब $\delta t \to 0$, ही कण का P बिंदु पर वेग v होगा । परिणामतः

$$V = \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{\delta t \text{ समय विस्थापन}}{\delta t}$$

$$\underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{\delta x}{\delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}$$

dx/dt को हम $\dot{x}$ से दर्शायेंगे, इसी प्रकार d^2x/dt^2 को $\ddot{x}$ से

यह तो ज्ञात है कि सदिश राशि होने के कारण वेग में परिणाम एवं दिशा दोनो होते हैं । इन दोनो में से किसी एक के बदलने से वेग एकसमान नहीं रहेगा ।

परिभाषा : किसी गतिमान बिंदु के वेग परिवर्तन की दर को वेगवृद्धि या त्वरण कहते हैं ।

अब हम सरल रेखीय गति में कण के वेगवृद्धि ज्ञात करेंगे । बिंदु O से किसी सरल रेखा में गतिमान होने के पश्चात् यदि t समय के पश्चात् बिंदु P पर उसका वेग v है, तथा $t+\delta t$ समय के बाद Q पर उसका वेग $V+\delta v$ है । तब δt समय अन्तराल में वेग परिवर्तन δv है (ध्यान रहे कि सरल रेखीय गति में P एवं Q दोनों पर वेग की दिशा समान है) अतः यदि P पर वेगवृद्धि f है तब परिभाषानुसार

$$f = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t \text{ समय में वेग परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta V}{\delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}$$

किन्तु

$$V = \frac{dx}{dt}, \quad \because \quad f = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{X}$$

इसी प्रकार

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{Vdv}{dx}$$

अतः वेगवृद्धि को दर्शाने के लिए dV/dt या d^2x/dt^2 या $V.\, dv/dx$ में से आवश्यकतानुसार कोई भी व्यंजक का उपयोग किया जा सकता है ।

वेग के समान वेगवृद्धि भी सदिश राशि है जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों है । यदि गतिमान कण का वेग समय के साथ घट रहा है, तब वेगवृद्धि ऋणात्मक होगी, उसे वेगह्रास कहेंगे ।

उदाहरण

एक कण अचर वेगवृद्धि f से एक सरल रेखा पर गतिमान है । यदि सरल रेखा के किसी बिंदु से वह u वेग से गति प्रारम्भ करे, तो उसकी गति की व्याख्या करो ।



मान लो सरल रेखा पर O एक नियत बिंदु है, जहाँ से u वेग से कण गति प्रारम्भ करता है। t समय के पश्चात् मान लो कण P बिंदु पर है, जहाँ $OP=x$, जो कि चर है। तब कण की गति का अवकल समीकरण होगा :

$$\ddot{X}=f \tag{1}$$

जहाँ f अचर है

t के सापेक्ष समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\dot{X}=ft+c_1,$$

जहाँ C_1 अचर है तब $t=0$ पर

$$u=0+c_1,$$

अतः

$$\dot{X}=u+ft \tag{2}$$

(2) को t के सापेक्ष पुनः समाकलन करने पर

$$X=ut+\frac{1}{2}ft^2+c_2$$

तब $t=0$ पर

$$0=0+0+c_2$$

$$\therefore \quad C_2=0$$

अतः

$$X=ut+\frac{1}{2}ft^2 \tag{3}$$

इस प्रकार (1) से हमें t समय के पश्चात् कण का वेग प्राप्त होता है, तथा (2) से t समय में चली गई दूरी प्राप्त होती है। यदि X दूरी चलने पर वेग V ज्ञात करना हो, तो, अवकल समीकरण (1) को निम्न रूप में लिखना होगा—

$$V\frac{dv}{dx}=f \tag{4}$$

अब (4) को X के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\frac{1}{2}V^2=fx+c_3,$$

जहाँ C_3 अचर है

प्रारम्भ में जब $x=0$, तब $v=u$, अत:

$$\frac{1}{2}u^2=0+c_3$$

अत: C_3 का मान रखने पर प्राप्त होगा—

$$v^2=u^2+2fx$$

(2) एक कण किसी सरल रेखा पर इस प्रकार गतिमान है कि उसकी वेगवृद्धि सदैव इस रेखा पर स्थित एक नियत बिंदु की ओर देशित रहती है, तथा इस बिंदु से कण की दूरी की अनुपाती होती है;

गति की व्याख्या करो—

नोट : इस गति को सरल आवर्त गति कहते हैं।



मान लो सरल रेखा $A'OA$ पर O नियत बिंदु है, तथा t समय पर कण P विंदु पर है, जहाँ $OP=X$, तब वेगवृद्धि $\ddot{X}$ की दिशा OP होगी। प्रश्नानुसार कण P की वेगवृद्धि O की ओर देशित है, तथा X के अनुपाती है।

मान लो कि यह μx है, जहाँ μ अचर है। तब P की गति का अवकल समीकरण होगा

$$\ddot{X}=-\mu x \qquad (1)$$

उपरोक्त समीकरण को हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैं—

$$2v\frac{dv}{dx}=-2\mu x$$

X के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होगा—

$$v^2=c-\mu x^2$$

मान लो कि A बिंदु से शून्य वेग से गति प्रारम्भ होती है जहाँ $OA=a$, तब

$$O=C-\mu a^2$$

अत:

$$v^2=\mu(a^2-x^2)$$

या

$$v=\pm\sqrt{\mu}\,\sqrt{(a^2-X^2)} \tag{2}$$

(2) के द्वारा O से X दूरी पर वेग ज्ञात होता है। यदि कण A से विरामावस्था से गति प्रारम्भ करता है, तब P पर वेग O की ओर देशित रहेगा, जबकि x की धनात्मक दिशा OP है, अत:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\mu}\,\sqrt{(a^2-x^2)}$$

या

$$\sqrt{\mu}\,dt=-\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$\sqrt{(\mu\,.\,t)}=\cos^{-1}\frac{x}{a}+C_2,$$

जहाँ C_2 एक अचर है। प्रारम्भिक प्रतिबन्ध के अनुसार, $t=O$, पर $x=a$,

$$O=\cos^{-1}1+C_2$$

$$\because\quad C_2=O$$

अत:

$$\sqrt{\mu}\,.\,t=\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

या

$$x=a\cos\sqrt{\mu}t$$

(2) से ज्ञात होता है कि $v=0$ जब $x^2=a^2$

अर्थात् जब

$$x=\pm a,$$

अत: यदि A' कोई बिंदु O के बायीं तरफ है, जहाँ

$$OA=OA'=a,$$

तब A' पर भी वेग शून्य होगा।

(2) से हमें ज्ञात होता है कि $x=O$ पर $U=\pm\sqrt{\mu}\,.\,a$ हमारे प्रारम्भिक प्रतिबन्ध के अनुसार A से विरामावस्था से गति प्रारम्भ होती है, O की ओर वेगवृद्धि

देशित है, अतः कण O की ओर ही गतिमान है। जब कण O पर पहुँचता है, तब वेगवृद्धि उस क्षण शून्य हो जाती है, किन्तु O पर ऋणात्मक दिशा में वेग $\sqrt{\mu}.t$ होने के कारण कण 0 के बायीं तरफ गतिमान होता है। ज्योंही कण O के बायीं तरफ पहुँचता है, उसके आकर्षण की दिशा O की ओर हो जायेगी। अतः इस विकर्षण के कारण उसका वेग घटता जायेगा तथा A' पर आकर वेग शून्य हो जायेगा। किन्तु O की तरफ त्वरण के कारण वह A' से फिर दायीं तरफ गतिमान हो जायेगा। इस प्रकार कण A एवं A' के मध्य दोलन करता रहेगा।

हल : $x=a\cos\sqrt{\mu}.t$ पर ध्यान दें। गति A से प्रारम्भ होती है, तथा कण O की दिशा में अग्रसर होता है, क्योंकि आकर्षण O की तरफ है। जब कण O पर पहुँचता है,

$$x=O, \quad \because \quad \cos\sqrt{\mu}.t=O=\cos\frac{\pi}{2}$$

अतः

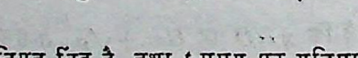
$$t=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$$

यह स्पष्ट है कि Oसे A' तक पहुँचने में भी इतना ही समय लगेगा। इस प्रकार A से गति प्रारम्भ करके वापिस A पर पहुँचने का समय

$$4\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

होगा, इसे सरल आवर्त गति का आवर्ती काल कहते हैं। दूरी a, जो कि OA के बराबर है, को गति का कोणांक (amplitude) कहते हैं। अतः गति का आवर्ती काल कोणांक से स्वतन्त्र होता है

(3) सिद्ध करो कि यदि कोई कण एक सरल रेखा पर एक नियत बिंदु की ओर इस प्रकार अग्रसर हो कि उसका वेग उस बिंदु से उसकी दूरी की nवीं घात के अनुपाती हो, जहाँ $n \geqslant 1$, तब उस बिंदु तक पहुँचने में उसे अनन्त समय लगेगा।



मान लो O नियत बिंदु है, तथा t समय पर गतिमान कण P पर है। यदि

$OP=x$, तब P पर वेग μx^n दिया है, जहाँ μ एक अचर राशि है। चूँकि P, O की ओर अग्रसर हो रहा है, अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{dx}{dt}=-\mu x^n$$

अर्थात्

$$-\frac{dx}{X^n}=\mu dt$$

समाकलन करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{1}{(n-1)\ X^{n-1}}=\mu t+c$$

यदि $t=O$ पर कण $x=a$ से गति प्रारम्भ करे, तब

$$\frac{1}{(n-1)\ a^{-n1}}=O+c$$

अतः

$$\frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{1}{X^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right\}=\mu t$$

यदि $n>1$, जब $X\to 0$, तब $t\to\infty$

अर्थात् गतिमान विंदु को O तक पहुँचने में अनन्त समय लगेगा। जब $n=1$, समीकरण होगा

$$\frac{dx}{dt}=-\mu x$$

या

$$\frac{dx}{x}=-\mu t$$

पमाकलन करने पर, एवं प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से

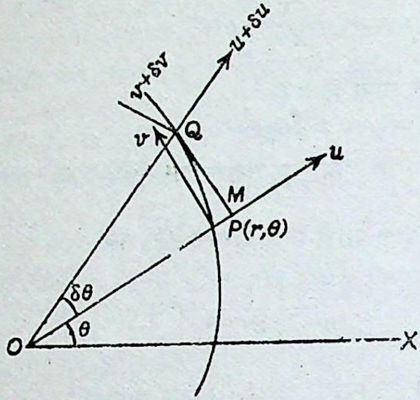
$$\log X/a=-\mu l$$

जब $X\to O$, तब $\log X\to -\infty$, अतः $t\to\infty$

4.2 त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग एवं वेगवृद्धि (Radial and Transverse velocity and Acceleration) :

जब कोई कण एक तल में विचरण करता है, तब ध्रुवीय निर्देशांकों को

सहायता से उसकी गति का अध्ययन करना अधिक सुविधाजनक होता है । अतः पहिले हमें गतिमान कण के वेग एवं वेगवृद्धि किसी नियत ध्रुव से खींचे गए ध्रुवीय त्रिज्या (Radius vector) के अनु एवं उसके लम्ब रूप दिशा में, ज्ञात करने होंगे ।



मान लो तल में O एक नियत बिन्दु है तथा OX प्रारंभिक रेखा है । t समय पर कण P बिंदु पर है, P के ध्रुवीय निर्देशांक (γ, θ) हैं, अतः $OX=\gamma$ एवं $\angle XOP=\theta$. मान लो $t+\delta t$ समय पर कण $O(\gamma+\delta\gamma, \theta+\delta\theta)$ पर है । तब $OQ=\gamma+\delta\gamma$ एवं $\angle POQ=\delta\theta$. समय अंतराल δt में कण का विस्थापन PQ होगा । Q से OP पर लम्ब QM खींचो, तब विस्थापन PQ के अवयव OP के अनु एवं उसके लम्ब रूप दिशा में क्रमशः PM एवं QM होंगे । मान लो OP के अनु एवं उसके लम्ब रूप दिशा में वेग के अवयव क्रमशः u एवं v हैं । तब,

$$u = \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{\delta_t \text{ समय में } OP \text{ के अनु विस्थापन}}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{PM}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{OM-OP}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{(\gamma+\delta\gamma)\cos\delta\theta-\gamma}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{(\gamma+\delta\gamma).1-\gamma}{\delta t}$$

चूंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है, $\cos \delta\theta = 1$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{\delta\gamma}{\delta t} = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$$

$$V = \underset{\delta \to 0}{\text{सीमा}} \frac{OP \text{ के लम्बरूप दिशा में } \delta t \text{ समय में विस्थापन}}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{QM}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{OQ \sin \delta\theta}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} \frac{(\gamma + \delta\gamma) \sin \delta\theta}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{सीमा}} (\gamma + \delta\gamma) \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

चूंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है, $\sin \delta\theta = \delta\theta$

$$= \gamma \frac{d\theta}{dt} = \gamma \dot{\theta},$$

सीमा लेने पर

अतः त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ दिशा में वेग के अवयव क्रमशः $\dot{\gamma}$ एवं $\gamma\dot{\theta}$ हैं, γ एवं θ की बढ़ती हुई दिशाओं में ये धनात्मक होंगे।

अब हम इन दिशाओं में वेगवृद्धि ज्ञात करेंगे। Q बिंदु पर त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ क्रमशः $u + \delta u$ एवं $v + \delta v$ होंगे।

δt समय में OP के अनु वेग परिवर्तन होगा :

$$= (u + \delta u) \cos \delta\theta - (v + \delta v) \sin \delta\theta - u$$

$$= (u + \delta u).1 - (v + \delta v)\, \delta\theta - u$$

$$= \delta u - V\delta\theta$$

द्वितीय कोटि की न्यून राशि को छोड़ने पर इसी प्रकार OP की लंब रूप दिशा में δt समय में वेग परिवर्तन

$$=(u+\delta u)\sin\delta\theta+(v+\delta v)\cos\delta\theta-v$$

$$=(u+\delta v.(\delta\theta+(v+\delta v).1-v,$$

$$=u\delta\theta+\delta v$$

$$\text{त्रिज्य वेगवृद्धि}=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\frac{\delta t\text{ समय में } OP \text{ के अनु वेग परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\frac{\delta u-v\delta\theta}{\delta t}$$

$$=\frac{du}{dt}-v\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{(d\gamma)}{dt}-\gamma\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{(d\theta)^2}{dt}=\ddot{\gamma}-\gamma\dot{\theta}^2$$

$$\text{अनुप्रस्थ वेगवृद्धि}=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\frac{\delta t\text{ समय में } OP \text{ के लम्ब रूप वेग परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\frac{u\delta\theta+\delta v}{\delta t}$$

$$=U\frac{d\theta}{dt}+\frac{dv}{dt}$$

$$=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\gamma\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$=\gamma\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\gamma\ddot{\theta}+2\dot{\gamma}\dot{\theta}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(\gamma^2\dot{\theta})$$

क्योंकि

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(\gamma^2\dot{\theta})=\frac{1}{\gamma}(2\gamma\dot{\gamma}\dot{\theta}+\dot{\gamma}^2\ddot{\theta})=2\dot{\gamma}+\gamma\ddot{\theta}$$

अतः वेगवृद्धि के अवयव OP की दिशा में $\ddot{\gamma}-\gamma\dot{\theta}^2$ एवं OP के लम्ब रूप दिशा $1/\gamma\ d/dt\ (\gamma^2\dot{\theta})$ होते हैं, इनकी धनात्मक दिशा क्रमशः γ की बढ़ती हुई एवं θ की बढ़ती हुई दिशाएं होती हैं।

उपपरिणाम ; यदि कण a त्रिज्या के वृत्त पर गतिमान है, तथा उसके केन्द्र को ध्रुव माना गया है, तब $\gamma=a$, अचर है, अतः $u=\dot{\gamma}=0$, $v=\gamma\dot{\theta}=a\dot{\theta}$ त्रिज्य वेगवृद्धि$=\ddot{\gamma}-\gamma\dot{\theta}^2=-a\dot{\theta}^2$, अर्थात केन्द्र की तरफ वेगवृद्धि $a\dot{\theta}^2$ है; अनुप्रस्थ वेगवृद्धि$=\gamma\ddot{\theta}+2\dot{\gamma}\dot{\theta}=a\ddot{\theta}$

वृत्त के लिये अनुप्रस्थ दिशा स्पर्शी की दिशा होती है।

उदाहरण (1) यदि किसी कण के त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग हमेशा परस्पर अनुपाती हों तो दर्शाओ कि वक्र समान कोणिक सर्पिल (equiangular spiral) है।

दिया है कि

$$\frac{d\gamma}{dt}=\lambda\gamma\frac{d\theta}{dt},$$

जहां λ अचर है

अर्थात

$$\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}=\frac{d\gamma}{d\theta}=\lambda\gamma$$

या

$$d\gamma/\gamma=\lambda d\theta$$

समाकलन करने पर, $\log\gamma=\lambda\theta+c$, c अचर है,

$$=\lambda+\log a,\ a \text{ अचर है}$$

या

$$\gamma=ae^{\lambda\theta}$$

जो कि समकोणिक सर्पिल है।

2. यदि गतिमान कण के त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग क्रमशः $\lambda\gamma^2$ एवं $\mu\theta^2$ हों, तो सिद्ध करो कि वक्र का समीकरण है $\lambda/\theta=\mu/2\gamma^2+C$, तथा इन दिशाओं में वेगवृद्धि के अवयव हैं

$$2\lambda^2\gamma^3-\mu^2\frac{\theta^4}{\gamma}$$

एवं

$$\lambda\mu\gamma\theta^2+2\mu^2\frac{\theta^2}{\gamma}$$

हल : त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग दिये गये हैं

$$\frac{d\gamma}{dt}=\lambda\gamma^2 \tag{i}$$

$$\gamma\frac{d\theta}{dt}=\mu\theta^2 \tag{ii}$$

वक्र का समीकरण ज्ञात करने के लिये, हम लिखते हैं

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{d\gamma/dt}{d\theta/dt}=\frac{\lambda\gamma^2}{(\mu\ \theta^2/\gamma)}=\frac{\lambda\gamma^3}{\mu\theta^2}$$

चूंकि
$$\int\frac{-\mu d\gamma}{\gamma^3}=\int-\lambda\frac{d\theta}{\theta^2}+C$$

अर्थात
$$\frac{\mu}{2\gamma^2}=\frac{\lambda}{\theta}+c$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

अब (i) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\dot{\gamma}=2\lambda\gamma\dot{\gamma}=2\lambda^2\gamma^3$$

अतः त्रित्य वेगवृद्धि होगी।

$$\dot{\gamma}-\gamma\dot{\theta}^2=2\lambda^2\gamma^3-\gamma\left(\frac{\theta^2}{\gamma}\right)^2, \text{(ii) से}$$

$$=2\lambda^2\gamma^3-\frac{\mu^2\theta^4}{\gamma}$$

इसी प्रकार (ii) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\gamma\ddot{\theta}+\dot{\gamma}\dot{\theta}=2\mu\theta.\dot{\theta}=2\,\frac{\mu^2\theta^3}{\gamma}$$

अत अनुप्रस्थ वेगवृद्धि होगी—

$$\gamma\ddot{\theta}+2\dot{\gamma}\dot{\theta}=(\gamma\ddot{\theta}+\dot{\gamma}\dot{\theta})+\dot{\gamma}\dot{\theta}$$

$$=2\,\frac{\mu^2\theta^3}{\gamma}+\lambda\gamma^2\frac{\mu\theta^2}{\gamma}=2\,\frac{\mu^2\theta^3}{\gamma}+\lambda\mu\gamma\,\theta^2$$

(3) एक गतिमान कण के हमेशा दो अचर वेग हैं; एक किसी नियत दिशा में है, एवं दूसरा किसी नियत बिंदु से खींचे गए त्रिज्य सदिश के लंबरूप दिशा में। सिद्ध करो कि उसका पथ एक शांकव काट (conic section) है।

हल : अनुच्छेद 4.2 के चित्र में, मान लो OX की दिशा में अचर वेग u है, एवं OP के लम्ब रूप दिशा में अचर वेग v है। तब हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d\gamma}{dt}=u\cos\theta$$

एवं

$$\gamma\,\frac{d\theta}{dt}=V-u\sin\theta$$

चूंकि

$$\frac{1}{\gamma}\,\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\gamma}\,\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{u\cos\theta}{v-u\sin\theta}$$

या

$$\frac{d\gamma}{\gamma}=\frac{u\,\mathrm{eos}\,\theta}{v-u\sin}\,d\theta$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$\log\gamma=-\log(v-u\sin\theta)+\log c$$

अर्थात

$$\gamma(v-u\sin\theta)=c=lv,$$

यदि वक्र OX को l दूरी पर काटता है। अतः वक्र होगा—

$$\gamma=\frac{l}{1-\dfrac{u}{v}\sin\theta}$$

जो कि एक शांकव काट है, जिसका ध्रुव O है, तथा उत्केन्द्रता (eccentricity) u/v है।

प्रश्नावली 28

1. एक कण के वेग, एक नियत मूलबिन्दु से गुजरने वाले सदिश त्रिज्या और उसके लम्ब रूप दिशा में क्रमशः $\lambda\gamma$ और $\mu\theta$ हैं। पथ ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिये कि सदिश त्रिज्या के अनु एव उसके लम्ब रूप दिशा में वेगवृद्धि

$$\lambda^2\gamma-\frac{\mu^2\theta^2}{\gamma} \text{ एवं } \mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{\gamma}\right) \text{ हैं।}$$

2. यदि किसी कण के त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग हमेशा परस्पर अनुपाती हैं, और यही त्वरणों के लिये भी सत्य है; सिद्ध कीजिए कि उसका वेग सदिश त्रिज्या के किसी घात का अनुपाती होगा।

3. एक नाव नदी के एक किनारे के बिन्दु A से गति प्रारम्भ करती है, नाव का स्वयं का अचर वेग u है, तथा इसकी दिशा हमेशा नदी के दूसरे किनारे पर A के अभिमुख स्थित बिन्दु B की ओर देशित रहती है। यदि नदी अचर वेग V से बहती है, तो नाव के पथ का समीकरण ज्ञात कीजिये। $V=u$ तो सिद्ध करो कि पथ एक परवलय है, जिसकी नाभि B है।

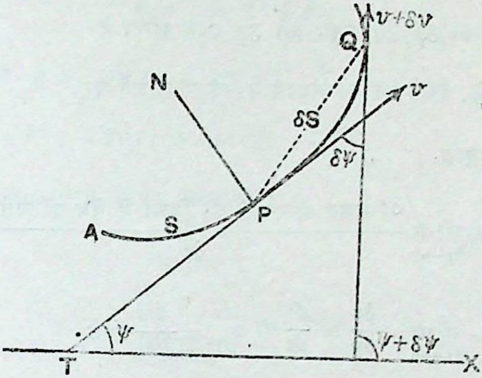
4. एक कण समानकोणिक सर्पिल $\gamma=ae^{m\theta}$ पर अचर वेग V से गतिमान है उसके वेग एवं त्वरण के अवयव त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ दिशाओं में ज्ञात कीजिये। (संकेत : $V^2=\dot{r}^2+\gamma^2\dot{\theta}^2$, $m=\cot\alpha$ रखिए)

5. एक कीड़ा एक गाड़ी के चक्के के आरे (spoke) के अनु अचर वेग u से गतिमान है, चक्के की त्रिज्या a है तथा गाड़ी का वेग v है। कीड़े की वेगवृद्धि आरे के अनु एवं उसके लम्बरूप दिशा में ज्ञात कीजिये।

4.21 स्पर्शीय तथा अभिलम्ब वेग एवं वेगवृद्धि (Tangential and normal velocity and acceleration)

मान लो कि किसी वक्र पर गतिमान कण t समय पर P पर स्थित है, तथा किसी नियत बिन्दु A से P तक की चाप की लम्बाई S है। मान लो कि $t+\delta t$ समय पर कण Q बिन्दु पर है, जहाँ चाप $AQ=S+\delta s$ P पर स्पर्शी PT का एक नियत सरल रेखा TX से आनत कोण ψ है, जबकि Q पर स्पर्शी का

आनत कोण $\psi+\delta\psi$ है। अतः दोनों स्पर्शियों के बीच का कोण $\delta\psi$ है। समय अन्तराल δt में कण का विस्थापन जीवा PQ है। अतः इस अन्तराल में कण का माध्य वेग = जीवा $PQ/\delta t$ जब δt बहुत छोटा होता जाता है, बिन्दु Q बिन्दु P की ओर अग्रसर होता है, तथा चाप $PQ/\delta t$ विस्थापन की दर हो जाता है।



अतः t समय पर कण का वेग

$$=\lim_{\delta t\to 0} \frac{\text{जीवा } PQ}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta \to 0} \frac{\text{जीवा } PQ}{\delta S}\cdot\frac{\delta s}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta r\to 0} \frac{\text{जीवा } PQ}{\delta s}\times \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta S}{\delta t}$$

$$=1\times\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}=S$$

जब बिन्दु Q, बिन्दु P के एकदम समीप पहुंचता है, जीवा PQ वक्र पर P बिन्दु पर स्पर्शी बन जाती है। अतः P बिन्दु पर वेग की दिशा P पर वक्र के स्पर्शी के अनु है तथा वेग $\dot{s}$ की धनात्मक दिशा S की बढ़ती हुई दिशा में है। इसलिये

$$V=\dot{s}$$

अब δt समय में P पर स्पर्शी की दिशा में वेग परिवर्तन

$$=(V+\delta v)\cos\delta\psi-v$$

$=(V+\delta v).1-v$, चूंकि $\delta\psi$ बहुत छोटा है, $\cos\delta\psi=1$

$=\delta v$

δt समय में P के अभिलम्ब की दिशा में वेग परिवर्तन

$=(v+\delta v)\sin\delta\psi-0$

$=(v+\delta v)\delta\psi$, $\sin\delta\psi=\delta\psi$, $\delta\psi$ बहुत छोटा है

$=V.\delta\psi$, दूसरे पद को नगण्य मानकर, छोड़ने पर

अतः स्पर्शीय वेगवृद्धि

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t \text{ समय में स्पर्शी की दिशा में वेग परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta \gamma}=\frac{dv}{dt}\text{ या }\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{S}.$$

या

$$=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=V\frac{dv}{ds}$$

अभिलम्ब वेगवृद्धि

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t \text{ समय में अभिलम्ब की दिशा में वेग परिवर्तन}}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{Vd\psi}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{Vd\psi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$=\lim_{\delta s\to 0}\frac{Vd\psi}{\delta s}\times\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta s}{\delta t}=\frac{V}{P}.V=\frac{v^2}{P}$$

जहाँ ρ बिन्दु P पर वक्रता त्रिज्या है। अतः अभिलम्ब की दिशा में वेग-वृद्धि का अवयव u^2/ρ है, जिसकी धनात्मक दिशा वक्र के अन्दर की तरफ है।

उप-परिणाम : यदि कण a त्रिज्या वाले वृत्त पर गतिमान है, तब $S=a\theta$ अतः स्पर्शीय वेगवृद्धि$=\ddot{S}=a\ddot{\theta}$, जो कि बढ़ते हुए θ की दिशा में धनात्मक होगा। अभिलम्ब वेगवृद्धि $=v^2/\rho=\dot{s}^2/a\ a^2\dot{\theta}^2/a=a\ddot{\theta}^2$ जो कि केन्द्र की तरफ है।

उदाहरण

यदि किसी वक्र पर गतिमान कण के स्पर्शीय एवं अभिलम्ब वेगवृद्धियां सदैव अचर रहें, तो सिद्ध करो कि समय t में गति की दिशा में परिवर्तन का कोण ψ निम्न सम्बन्ध से दिया जाएगा

$$\psi = A \log (1+Bt)$$

हल : दिया गया है $\ddot{S}$=अचर$=a$, मान लो (i)

एवं $\dot{S}^2/\rho = V^2/\rho$=अचर$=b$ मान लो

(i) को समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\dot{s} = at + c \qquad (ii)$$

तथा

$$\frac{\dot{s}}{ds/d\psi} = b$$

या

$$\dot{s}\frac{ds/dt}{ds/d\psi} = b,$$

या

$$\dot{s}\frac{d\psi}{dt} = b$$

अत: (ii) से $\dot{s}$ का मान रखने पर

$$(at+c)\frac{d\psi}{dt} = b$$

अर्थात

$$d\psi = \frac{a}{(at+c)}\,dt$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\psi = b/a \log (at+c) + d$$

हम मान सकते हैं कि

$$\therefore \qquad 0 = b/a \log (0+c) + d$$

जब

$$t=0, \psi=0$$

अत:

$$\psi = b/a \log (i + a/c\ t)$$

$$= A \log (i + Bt)$$

एक कण एक समान चाल से एक वक्र पर गतिमान है (जिसके लिये S तथा ψ एक साथ ही शून्य होते हैं) यदि किसी बिन्दु पर वेगवृद्धि $v^2c/S^2 + C^2$ हो, तो वक्र का नैज समीकरण (Intrinsic equation) ज्ञात करो।

हल : चूंकि कण एक समान चाल से गतिमान है, अत: वेग v अचर है, तब स्पर्शीय वेगवृद्धि $= dv/dt = 0$ अर्थात कण की पूर्ण वेगवृद्धि अभिलम्ब दिशा में ही होगी।

प्रश्नानुसार

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2 C}{S^2 + C^2}$$

या

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{C}{S^2 + C^2}, \; d\psi = \frac{C}{S^2 + C^2}\, ds$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\psi = \tan^{-1} \frac{S}{C} + d$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से,

$$0 = 0 + d, \; \therefore \; d = 0$$

वक्र है

$$S = c \tan \psi$$

जो कि केटिनरी (Catenary) है।

3. एक बिन्दु किसी रज्जु वक्र (Catenary) पर गतिमान है, वक्र का नैज समीकरण

$$S = c \tan \psi$$

है। किसी बिन्दु पर इसकी वेगवृद्धि की दिशा उस बिन्दु पर के स्पर्शी तथा अभिलम्ब से बराबर कोण बनाते हैं। यदि शीर्ष पर, जहाँ $\psi = 0$, वेग u हो, तो दर्शाओ कि किसी बिन्दु पर वेग तथा वेगवृद्धि के मान क्रमश: होंगे

$$ue^{\psi} \text{ एवं } \sqrt{\left(\frac{2}{C}\right)} u^2 e^{2\psi} \cos^2 \psi$$

हल : चूँकि वेगवृद्धि दिशा स्पर्शी एवं अभिलम्ब के बीच के कोण की अर्द्धक है, अतः स्पर्शीय एवं अभिलम्ब दिशा में वेगवृद्धि के अवयव बराबर हैं।

$$\therefore \qquad V\frac{dv}{ds} = \frac{V^2}{\rho}$$

या

$$\frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = V = \frac{dv}{d\psi}$$

समाकलन करने पर

$$\log v = \psi + d$$

या

$$V = Ae^{\psi},$$

जब

$$\psi = 0,\ V = u;\ A = u$$

अतः

$$V = ue^{\psi}$$

चूँकि वक्र है

$$S = c \tan \psi,$$

अतः

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = c \sec^2 \psi$$

अब स्पर्शीय वेगवृद्धि

$$= V\frac{dv}{ds} = V\frac{dv}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds}$$

$$= \frac{U \cdot e^{\psi}\ ue^{\psi}}{c \sec^2 \psi} = \frac{U^2 e^{2\psi}}{C} \cos^3 \psi$$

अभिलम्ब वेगवृद्धि

$$= \frac{V^2}{P} = \frac{u^2 e^{2\psi}}{C \sec^2 \psi} = -\frac{u^2}{c} e^{2\psi} \cdot \cos^3 \psi$$

परिणामी वेगवृद्धि

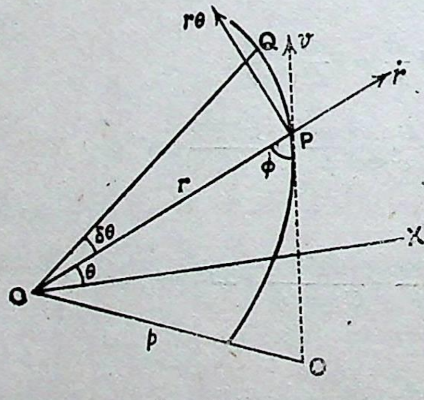
$$= \frac{u^2}{c} e^{2\psi} \cos^2 \psi \sqrt{(1+1)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{c}\right)} u^2 e^{2\psi} \cos^2 \psi$$

4.22 जो परिणाम हमने इस अध्याय में अभी तक प्राप्त किये हैं, उन्हें स्मरण रखने में निम्न तालिका सहायक होगी

दिशा	वेग	वेगवृद्धि
x अक्ष के अनु	$\frac{dx}{dt}=\dot{x}$	$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{X}$
y अक्ष के अनु	$\frac{dy}{dt}=\dot{y}$	$\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{Y}$
त्रिज्य	$\frac{dr}{dt}=\dot{r}$	$\frac{dr^2}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$
अनुप्रस्थ	$r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta}$	$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$
स्पर्शीय	$\frac{ds}{dt}=\dot{S}$	$\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{S}=\frac{dv}{dt}=V\frac{dv}{ds}$
अभिलम्ब	0	$\frac{V^2}{\rho}$

4.23 कोणीय वेग एवं वेगवृद्धि (Angular Velocity and Acceleration)



परिभाषा : जब एक सरल रेखा किसी तल पर परिक्रमण करती है, तथा तल पर किसी नियत रेखा से कोण बनाती है, तब इस कोण की वृद्धि की दर रेखा का कोणीय वेग कहलाती है।

मान लो O वक्र का ध्रुव है, तथा OX नियत प्रारम्भिक रेखा है; t समय पर कण P पर है, जहाँ

$$\angle XOP=\theta \quad t+\delta t$$

समय पर कण Q पर है, अतः δt समय में रेखा OP कोक्ष $\delta\theta$ से घूम गई। इस प्रकार δt समय अन्तराल में माध्य कोणीय वेग $\delta\theta/\delta t$ होगा। जब δt बहुत छोटा होता है, Q, P की ओर अग्रसर होता है तथा $\delta\theta/\delta t$ की सीमा θ के परिवर्तन की दर हो जाती है।

कोणीय वेग

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$$

इसी प्रकार कोणीय वेगवृद्धि

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}$$

यदि P पर कण का वेग v है, जो कि स्पर्शी की दिशा में है, तब हमें ज्ञात है कि कण के वेग के अवयव त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ दिशाओं में क्रमशः $\dot{r}$ एवं $r\dot{\theta}$ होते हैं। अतः v का अवयव अनुप्रस्थ दिशा में लेने पर

$$V\sin\phi=r\,\dot{\theta},$$

जहाँ ϕ OP एवं स्पर्शी के बीच का कोण है। अतः

$$\dot{\theta}=\frac{V\sin\phi}{r}$$

किन्तु यदि ध्रुव O से स्पर्शी पर डाला गया लम्ब P है, तब

$$p=r\sin\phi,$$

अतः

$$\dot{\theta}=\frac{Vp}{r^2}$$

उपरोक्त परिणामों को निम्न प्रकार से भी प्राप्त कर सकते हैं

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt},$$

चूंकि

$$r\frac{d\theta}{ds}=\sin\phi$$

$$=\frac{\sin\phi}{r}.V$$

$$=\frac{Vp}{r^2}$$

उदाहरण

4. एक कण एक परवलय पर नाभि के परितः एकसमान कोणीय वेग से, गतिमान है। सिद्ध करो कि पथ के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वेगवृद्धि उस पर की वक्रता त्रिज्या की अनुपाती है।

परवलय का पदिक समीकरण (pedal equation) है

$$p^2=ar,$$

जहाँ नाभि ध्रुव है।

अतः p के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2p=a\frac{dr}{dp},\ \frac{dr}{dp}=\frac{2p}{a}$$

अब

$$\rho=r\frac{dr}{dp}=\frac{p^2}{a}\frac{2p}{a}=\frac{2p^3}{a^2} \tag{i}$$

$$\dot{\theta}=\frac{Vp}{r^2}=w$$

मान लो, जो कि अचर है अतः

$$v=\frac{wr^2}{p}=\frac{wp^3}{a^2} \tag{ii}$$

अब (i) व (ii) से

$$\frac{v}{\rho}=\frac{w}{2}$$

$\therefore$ $$v=\frac{w\rho}{2}$$

अतः अभिलम्ब वेगवृद्धि

$$=\frac{v^2}{\rho}=\frac{1}{4}w^2\rho$$

अर्थात् अभिलम्ब वेगवृद्धि वक्रता त्रिज्या की अनुपाती है।

5. एक बिन्दु P_1, OP के अचर कोणीय वेग से, समान कोणिक सर्पिल पर गतिमान है, जिसका ध्रुव O है। इसकी वेगवृद्धि ज्ञान करो और दर्शाओ कि इसकी दिशा P पर के स्पर्शी से वही कोण बनाती है जो कि दिक् त्रिज्या (radius vector) OP स्पर्शी से बनाती है।

समान कोणिक सर्पिल का समीकरण है

$$r=ae^{\theta \cot \alpha}$$

दिया है $\dot{\theta}$=अचर=w मान लो, अतः $\ddot{\theta}=o$

$$\therefore \qquad \dot{r}=a\cot\alpha \, . \, e^{\theta\cot\alpha}\,\dot{\theta}=wr\cot\alpha$$

$$\ddot{r}=w\dot{r}\cot\alpha=w^2\cot^2\alpha r$$

त्रिज्या वेगवृद्धि

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=w^2\cot^2\alpha\,.\,r-rw^2=(\cot^2\alpha-1)w^2r$$

अनुप्रस्थ वेगवृद्धि

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2w^2r\cot\alpha$$

अतः परिणामी वेगवृद्धि

$$=w^2r\sqrt{((\cot^2\alpha-1)^2+4\cot^2\alpha)}$$

$$=w^2r(\cot^2\alpha+1)=w^2r\,\text{cosec}^2\,\alpha$$

यदि परिणामी वेगवृद्धि की दिशा OP से θ काण बनाती है, तब

$$\tan\theta=\frac{2w^2r\cot\alpha}{(\cot^2\alpha-1)w^2r}=\frac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha-1}=\tan 2\alpha,$$

$$\therefore \qquad \theta=2\alpha$$

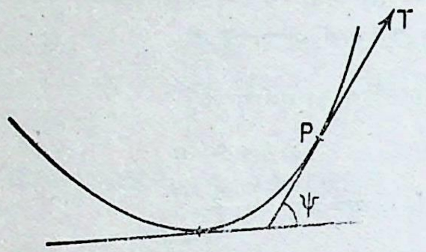
किन्तु P पर स्पर्शी OP से α कोण बनाती है। अतः परिणामी वेगवृद्धि स्पर्शी से भी यही कोण α बनाती है।

6. एक बिन्दु एक वृत्तजात (cycloid) के चाप पर इस प्रकार गतिमान है कि स्पर्शी अचर कोणीय वेग से घूमता है। सिद्ध करो कि इस बिन्दु की वेगवृद्धि का परिणाम अचर है।

वृत्तजात का समीकरण प्राचल θ में है

$$X=a\,(\theta+\sin\theta)$$

$$y=a\,(1-\cos\theta)$$



प्रश्नानुसार $\dot{\psi}$=अचर है$=C/2$ मान लो

$$\tan\psi=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$\therefore \qquad \psi=\frac{\theta}{2},\ \dot{\theta}=2\dot{\psi}=c$

अब

$$\dot{x}=a(1+\cos\theta)\,\dot{\theta}=a(1+\cos\theta)c$$

$\therefore \qquad \ddot{X}=-a\sin\theta\,.\,c^2$

तथा

$$\dot{y}=a\sin\theta\,.\,\dot{\theta}=a\sin\theta\,.\,c$$

और

$$\ddot{y}=a\cos\theta\,.\,c^2$$

अतः परिणामी वेगवृद्धि

$$=\sqrt{(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)}=ac^2\sqrt{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=ac^2$$

जो कि अचर है।

7. एक बिन्दु मूल बिन्दु से मूल रेखा की दिशा में f/ω वेग गति से प्रारम्भ करके मूल बिन्दु के परितः अचर कोणीय वेग ω से, तथा अचर ऋणात्मक त्रिज्य त्वरण $-f$ के साथ गतिमान है। सिद्ध कीजिये कि त्रिज्या वेग में वृद्धि दर कभी भी धनात्मक नहीं हो सकती है; किन्तु वह शून्य सीमा की ओर अग्रसर होती है। यह भी सिद्ध कीजिये कि पथ का समीकरण है—

$$\omega^2 r = f(4 - e^{-\theta})$$

दिया है $\dot{\theta} = \omega$, अतः $\theta = \omega t$

त्रैज्य गति समीकरण होगा

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -f$$

अतः

$$\ddot{r} = \omega^2 \left(\frac{r - f}{\omega^2} \right) \qquad \text{(i)}$$

समीकरण (i) का हल है

$$\frac{r - f}{\iota \omega^2} \; Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \qquad \text{(ii)}$$

जहाँ A एवं B अचर हैं, जिनके मान प्रारम्भिक प्रतिबन्धों के उपयोग से ज्ञात होंगे।

हमें दिया है $t = 0$ पर, $r = 0$ अतः (ii) से प्राप्त होगा

$$\frac{-f}{\omega^2} A = B$$

या

$$\frac{-f}{\omega} = A\omega + B\omega \qquad \text{(iii)}$$

(ii) को t के सापेक्ष अवकन करने पर

$$\dot{r} = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{\omega t}$$

दिया है कि $t = 0$ पर,

$$\dot{r} = \frac{f}{\omega} \; ;$$

अतः

$$\frac{f}{\omega} = Aw - B\omega \qquad \text{(vi)}$$

(iii) +(iv) से

$$2A\omega=0, \quad \therefore \quad A=0$$

अतः

$$B=\frac{f}{\omega^2}$$

अतः A एवं B के मान (ii) में प्रतिस्थापित करने पर

$$r-\frac{f}{\omega^2}=-\frac{f}{\omega^2}e^{-\omega t}$$

अर्थात्

$$r=\frac{f}{\omega^2}(1-e^{-\theta}),$$

क्योंकि

$$\omega t=\theta$$

यही पथ का अभीष्ट समीकरण है।

अब त्रिज्य वेग है $\dot{r}$, तथा इसमें वृद्धि दर होगी $\ddot{r}$ उपरोक्त से

$$\dot{r}=\frac{f}{\omega}e^{-\omega t}$$

अतः

$$\ddot{r}=(-\omega)\frac{f}{\omega}e^{-\omega t}=-fe^{-\omega t}$$

अतः त्रिज्य में वेग वृद्धि दर कभी धनात्मक नहीं हो सकती।

$$\text{किन्तु } \underset{t\to\infty}{\text{सीमा}}\ \ddot{r}=\underset{t\to\infty}{\text{सीमा}}\ (-fe^{-\omega t})=0$$

अतः यद्यपि वृद्धि दर कभी धनात्मक नहीं होगी, किन्तु अनन्त समय पश्चात् वह शून्य की ओर अग्रसर हो रही है।

प्रश्नावली 29

1. एक बिन्दु एक वक्र पर इस प्रकार गतिमान है कि उसकी स्पर्शीय एवं अभिलम्ब वेगवृद्धियाँ समान हैं, एवं स्पर्शी का कोणीय वेग अचर है। वक्र का समीकरण ज्ञात करो।

2. एक बिन्दु P अचर वेग से एक वक्र पर गतिमान है, P को एक नियत

बिन्दु O से जोड़ने वाली दिक्-त्रिज्या का कोणीय वेग OP का उत्क्रमानुपाती है। सिद्ध करो कि वक्र समान कोणिक सर्पिल है जिसका ध्रुव O है, तथा P की अभिलम्ब वेगवृद्धि OP को उत्क्रमानुपाती है।

3. यदि कोई कण अचर चाल से एक वृत्त पर गतिमान है, तो सिद्ध करो कि वृत्त के किसी भी बिन्दु के परितः उसका कोणीय वेग केन्द्र के परितः कोणीय वेग का आधा होगा।

4. यदि किसी समतल वक्र पर गतिमान बिन्दु का वेग वक्रता त्रिज्या का अनुपाती हो, तो दर्शाओ कि गति की दिशा अचल कोणीय वेग से परिवर्तित होती है।

   यह भी दर्शाओ कि यदि गतिमान बिन्दु का कोणीय वेग किसी नियत मूल बिन्दु के परितः अचल हो, तो उसकी अनुप्रस्थ वेगवृद्धि त्रिज्य वेग की अनुपाती होगी।

5. एक कण एक समान चाल से एक परवलय पर गतिमान है, सिद्ध करो कि किसी बिन्दु P पर नाभि S के परितः कोणीय वेग $SP^{3/2}$ का उत्क्रमानुपाती होगा।

6. सिद्ध करो कि किसी तल पर गतिमान बिन्दु की गति की दिशा की कोणीय वेगवृद्धि होगी :

$$\frac{V}{\rho}\frac{dv}{aS}-\frac{v^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dS}$$

7. एक कण एक वृत्त $\gamma=2a\cos\theta$ के अनु इस प्रकार गतिमान है कि मूल बिन्दु की ओर इसकी वेगवृद्धि सदैव शून्य रहती है। सिद्ध करो कि

$$\frac{d\omega}{dt}=-2\omega^2\cot\theta,\ \omega=\frac{d\theta}{dt}$$

8. एक कण वक्र $\gamma-ae^{\theta}$ पर अचर कोणीय वेग से गतिमान है; सिद्ध करो कि इसकी त्रिज्य वेगवृद्धि शून्य है, एवं अनुप्रस्थ वेगवृद्धि ध्रुव से इसकी दूरी की अनुपाती है।

9. एक कण एक तल पर इस प्रकार गतिमान है कि उसकी स्पर्शीय वेगवृद्धि अचर है तथा स्पर्शीय वेग एवं अभिलम्ब वेगवृद्धि के परिमाण एक अचर

अनुपात में हैं। दर्शाओ कि पथ का नैज समीकरण (intrinsic equation) का रूप होगा :

$$S = A\psi^2 + B\psi + c$$

19. एक कण का समान कोणिक सर्पिल $\gamma = ae^{\theta \cot\alpha}$ पर इस प्रकार गतिमान है कि, कण की दिक्त्रिज्या का कोणीय वेग अचर है। दर्शाओ कि कण कि परिणामी वेगवृद्धि दिक्त्रिज्या के 2α कोण बनाती है एवं उसका परिमाण v^2/γ है, जहां V कण की चाल है।

4 3 ब बल गतिकी : बल एवं गति (Kinetics : Force and motion)

न्यूटन के गति के नियम (Newton's Laws of motion)

गतिविज्ञान का मुख्य ध्येय ज्ञात बलों द्वारा उत्पन्न हुई गति का अध्ययन है। इसके लिये पिंडों में पदार्थ का द्रव्यमान तथा बल और गति के संबंध का ज्ञान आवश्यक है। न्यूटन ने सत्रहवीं शताब्दी में अपने विख्यात गति के नियमों का प्रतिपादन किया था। इन नियमों से बल एवं गति के बीच संबंध स्थापित होता है। न्यूटन ने सन् 1686 में निम्नलिखित गति नियम प्रकाशित किये।

नियम 1 : प्रत्येक पिण्ड अपनी विरामावस्था में अथवा एक सरल रेखा में एक समान वेग से तब तक गतिमान रहेगा, जब तक उसे कोई बाह्य बल अपनी अवस्था बदलने के लिये बाध्य नहीं कर देता।

व्याख्यां : इस नियम से हमें बल (force) की परिभाषा प्राप्त होती है। इसके अनुसार यदि पिंड आरम्भ में गतिहीन हो तो जब तक इस पर कोई बाह्य (external) बल आरोपित न हो, वह स्थिर ही रहेगा। यह नियम वास्तव में पदार्थ की अक्रियशीलता का द्योतक है। इसीलिये इसको जड़त्व का सिद्धांत (Law of Inertia) भी कहते हैं।

नियम 2 : संवेग परिवर्तन की दर (rate of change of momentum) पिण्ड पर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती (directly proportional) होती है एवं उसकी दिशा आरोपित बल की दिशा में ही होती है।

व्याख्या : यह नियम बल की माप ज्ञात करने की विधि बताता है। मान लो

किसी पिण्ड का द्रव्यमान m है तथा उस पर लगा बाह्य बल P है जबकि वेग v है, अतः इस नियम के अनुसार

$P \alpha$ संवेग परिवर्तन की दर

अर्थात

$$\alpha \frac{d}{dt}(mv)$$

या

$$\alpha m \frac{dv}{dt},$$

चूंकि m अचर है

αmf जहां f त्वरण है, चूंकि

$$f = \frac{dv}{dt}$$

$\therefore P = \lambda mf$ जहां λ कोई अचर राशि है।

अब यदि बल की इकाई इस प्रकार निर्धारित की जाये कि उसके द्वारा इकाई द्रव्यमान में इकाई त्वरण उत्पन्न हो,

अर्थात

$$P = 1, \text{ जब } m = 1, \text{ तथा } f = 1, \text{ तब}$$

$$1 = \lambda.1.1$$

अर्थात $$\lambda = 1$$

अत: $P = mf$ या

$$P = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

या त्वरण

$$f = \frac{P}{m} = \frac{\text{आरोपित बल}}{\text{चलित द्रव्यमान}}$$

4.31 बल का मात्रक (Unit of force)

फुट-पाउंड-सेकन्ड (F. P. S) पद्धति में बल के मात्रक को **पाउंडल** (Poundal) कहते हैं। अतः एक पाउंडल वह बल है जो एक पाउंड द्रव्यमान में एक फुट प्रति सेकंड प्रति सेकंड का त्वरण उत्पन्न करता है।

सेन्टीमीटर-ग्राम-सेकन्ड (C. G. S.) पद्धति में बल का मात्रक डाइन (Dyne) कहलाता है। इस प्रकार एक डाइन वह बल है जो एक ग्राम द्रव्यमान में एक सेंटी मीटर प्रति सेकन्ड का त्वरण उत्पन्न करता है।

मीटर-किलोग्राम-सेकन्ड (M. K. S) पद्धति में बल की इकाई एक न्यूटन है। अतः एक न्यूनट वह बल है जो कि एक किलोग्राम द्रव्यमान में एक मीटर प्रति सेकन्ड प्रति सेकन्ड का त्वरण उत्पन्न करता है।

अतः एक न्यूटन $=10^5$ डाइन

4.32 बलों की भौतिक स्वतंत्रता (Physical Independence of forces)

न्यूटन के दूसरे नियम में बलों की भौतिक स्वतंत्रता के सिद्धान्त का भी समावेश है। इसका तात्पर्य है कि किसी कण पर विभिन्न बलों के प्रभाव एक दूसरे पर जरा भी निर्भर नहीं होते क्योंकि प्रत्येक बल का प्रभाव उसका अनुपाती है। यह स्पष्ट है कि किसी बल का प्रभाव, परिमाण तथा दिशा, दोनों में वही होगा जो उस समय होगा जब कण स्थिर हो, तथा उस पर केवल वही बल आरोपित हो। अतएव विभिन्न बलों का कण पर पूर्ण प्रभाव इन बलों के पृथक-पृथक प्रभावों का परिणामी होगा।

मान लो कि m द्रव्यमान के एक पिण्ड पर आरोपित बलों के अवयव X एवं Y अक्षों के समानान्तर दिशाओं में X एवं Y हैं, तब द्वितीय नियम से हमें गति के निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं—

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \text{ एवं } m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

वाम पक्ष के व्यंजकों को प्रभावी बल (Effective forces) कहते हैं तथा दाहिनी तरफ तो आरोपित बल हैं ही। अतः किसी भी दिशा में कार्यरत आरोपित बल उस दिशा के प्रभावी बल के तुल्य होता है।

4.33 न्यूटन का तृतीय नियम

"प्रत्येक क्रिया (Action) के लिए तुल्य एवं विपरीत प्रतिक्रिया (Reaction) होती है।

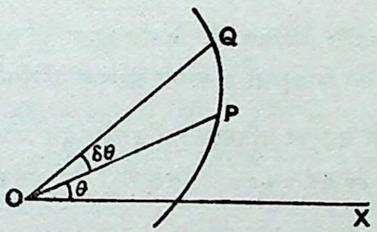
यह नियम बल की मूलभूत प्रकृति को समझने में सहायक है। इसके अनुसार

बल हमेशा तुल्य एवं विपरीत बलों के युग्मों में ही उपस्थित होते हैं। कुर्सी पर बैठकर कुर्सी को हम जिस बल से नीचे दबाते हैं, ठीक उसी के बराबर ऊपर की ओर वह हमें दबाती है। किसी पिण्ड पर पृथ्वी का आकर्षण उस पिण्ड का भार होता है, परन्तु वह पिण्ड भी पृथ्वी को अपने भार के बराबर और विपरीत बल से खींचता है। इसी प्रकार यदि एक छोटा चुम्बक और भारी लोहा कुछ दूरी पर रखें जायें, तो भारी लोहा छोटे चुम्बक को अपनी ओर खींच लेगा। कारण यह है कि जिस बल से चुम्बक लोहे को खींचेगा, ठीक उतने ही बल से विपरीत दिशा लोहा चुम्बक को खींचेगा। स्पष्ट है कि यह नियम पिण्डों की विराम एवं गतिमान अवस्था दोनों पर सदैव सत्य होता है।

विविध साधित उदाहरण

1. एक कण एक केन्द्रीय बल से प्रेरित होकर एक वक्र पर गतिमान है। दर्शाओ कि कण की दिक् त्रिज्या समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल परिलिखित करती है।

हल : चूंकि केन्द्रीय बल से प्रेरित होकर कण गति कर रहा है, अतः संपूर्ण वेगवृद्धि त्रिज्य होगी; अतः अनुप्रस्थ दिशा में गति का समीकरण होगा (न्यूटन के द्वितीय नियम से)



$$m \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(\gamma^2\dot\theta)=0$$

अर्थात

$$\frac{d}{dt}(\gamma^2\dot\theta)=0$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा :

$$r^2\dot\theta=h, \text{ एक अचर है}$$

अब हम दर्शाते हैं कि $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ कण का P पर क्षेत्रीय वेग (areal velocity) है।

मान लो t एवं $t+\delta t$ समयों पर कण P एवं Q पर है।

तब
$$<POQ=\delta\theta,\ OP=\gamma$$
तथा
$$OQ=\gamma+\delta\gamma$$

$\triangle POQ$ का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\,OP.OQ\sin POQ$$
$$=\frac{1}{2}\,\gamma(\gamma+\delta\gamma)\sin\delta\theta$$

$$\therefore \quad \text{क्षेत्रीय वेग}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\text{क्षेत्रफल } POQ}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{1}{2}\gamma(\gamma+\delta\gamma)\frac{\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to 0}{\text{सीमा}}\ \frac{1}{2}\gamma(r+\delta\gamma)\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$=\frac{1}{2}\,\gamma^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}\,h$$

अतः केन्द्रीय बल के अन्तर्गत जब कण P गतिमान होता है, तब कण की दिक् त्रिज्या, OP, समान समय अन्तरालों में समान क्षेत्रफल परिलिखित करती है।

2. एक कण किसी तल पर गतिमान है। उसके वेग x-अक्ष एवं y-अक्ष के समानान्तर क्रमशः $u+ey$ एवं $v+ex$ हैं; सिद्ध करो कि इसका पथ एक शांकव होगा।—

हल : दिया है
$$\frac{dx}{dt}=u+ey$$
एवं
$$\frac{dy}{dt}=v+ex$$
अतः
$$\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{v+ex}{u+ey}$$

अर्थात

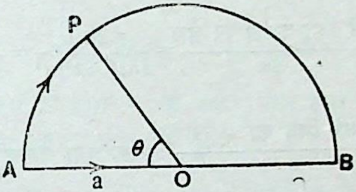
$$(u+ey)\, dy=(v+ex)\, dx$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा—

$$(u+ey)^2=(V+ex)+C, \ c \text{ अचर है ।}$$

उपरोक्त समीकरण एक शांकव काट (conic section) है, क्योंकि हमें ज्ञात है कि द्वितीय घात का व्यापक समीकरण हमेशा एक शांकव काट दर्शाता है ।

3. एक बिन्दु किसी वृत्त के व्यास AB पर एक समान वेग से गतिमान है, एक दूसरा बिन्दु उसकी अर्द्ध-परिधि AB पर विरामावस्था से एक समान स्पर्शीय त्वरण पर से चलता है । ये दोनों A से एक साथ गति प्रारंभ करते हैं, तथा एक साथ ही B पर पहुँचते हैं । सिद्ध करो कि B पर वेग $\pi : 1$ के अनुपात में होंगे ।



मान लो वृत्त की त्रिज्या a है, तथा u प्रथम बिन्दु का वेग है, जो कि व्यास AB के अनुगमन करता है । इसको $2a$ दूरी चलने में लगा समय$=2a/u$ मान लो दूसरे कण का स्पर्शीय त्वरण f है, जो कि अचर है । t समय पश्चात यदि बिंदु P पर है, जहाँ $\angle AOP=\theta$; चाप $AP=S=a\theta$, $S=a\dot{\theta}$, अतः दूसरे कण की गति का समीकरण है

$$\frac{d^2s}{dt^2}=a\ddot{\theta}=f.$$

समाकलन करने पर

$$a\,\frac{d\theta}{dt}=ft+c$$

$t=0$, पर वेग $=a\,(d\theta/dt)$, शून्य दिया गया है, अतः $c=0$

$$a\,\frac{d\theta}{dt}=ft \tag{1}$$

(1) का समाकलन करने पर प्राप्त होगा ।

$$a\theta = \frac{1}{2} ft^2 + d,$$

किंतु अचर d का मान शून्य होगा क्योंकि $t=0$, पर $\theta=0$

$$\therefore \quad a\theta = \frac{1}{2} ft^2 \qquad (2)$$

इस दूसरे बिन्दु को अर्ध व्यास पर गति करने में लगा समय$=2a/u$, प्रथम के समान ही ।

अत: B पर पहुँचने पर इसका वेग$=f.2a/u$ (1) से

एवं

$$a\pi = \frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{4a^2}{u^2}, \quad (2) \text{ से ।}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{दूसरे बिंदु का } B \text{ पर वेग}}{a\pi} = \frac{f.2a/u}{1/2f.4a^2/u^2} = \frac{u}{a}$$

$$\frac{\text{अत: दूसरे बिंदु का } B \text{ पर वेग}}{u} = \pi, \text{ जहां प्रथम बिंदु का वेग है ।}$$

(4) वक्र $y=a \log \sec (x/a)$ पर एक कण इस प्रकार गतिमान है कि वक्र का स्पर्शी एक समानतः परिक्रमण करता है । सिद्ध करो कि कण की लब्ध वेग-वृद्धि वक्रता त्रिज्या के वर्ग की अनुपाती है ।

वक्र है

$$y = a \log \sec \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a \frac{\sec x/a . \tan x/a}{\sec x/a} \frac{1}{a} = \tan \frac{x}{a} = \tan \psi$$

अत:

$$\psi = x/a, \; X = a\psi$$

$$\therefore \quad \dot{X} = a\dot{\psi} = a\omega, \quad \text{जहां } \omega \text{ अचर है ।}$$

$$\therefore \quad \ddot{X} = 0,$$

अतः अक्ष की दिशा में वेगवृद्धि शून्य है। अर्थात संपूर्ण वेगवृद्धि yअक्ष की दिशा में है।

अब

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=a\omega \tan\psi$$

अतः t समय पर वेग V

$$=\sqrt{(\{\dot{X}^2+\dot{y}^2\})}$$

$$=a\omega\sqrt{(1+\tan^2\psi)}=a\omega \sec\psi$$

अब वक्रता त्रिज्या

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}\quad\frac{ds/dt}{d\psi/dt}\quad\frac{U}{\omega}=a\sec\psi$$

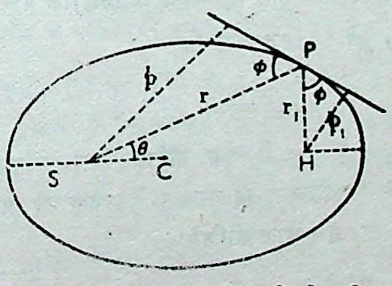
तथा

$$\ddot{y}=a\omega\sec^2\psi.\dot{\psi}=a\omega^2\sec^2\psi$$

$$=\frac{\omega^2}{a}\rho^2$$

चूंकि संपूर्ण वेगवृद्धि y अक्ष की दिशा में है, अतः सिद्ध हुआ कि कण की लब्ध वेगवृद्धि वक्रता त्रिज्या के वर्ग की अनुपाती है।

5. एक कण P एक दीर्घ वृत्त पर इस प्रकार गतिमान है कि एक नाभि के परितः उसका कोणीय वेग दिक्-त्रिज्या के वर्ग का उत्क्रमानुपाती है। यदि दीर्घ



वृत्त का केन्द्र C हो, तो सिद्ध करो कि दूसरी नाभि के परितः कोणीय वेग CP के संयुग्मी व्यास (conjugate diameter) के वर्ग का उत्क्रमानुपाती होगा। S एवं H दोनों नाभियाँ हैं, जिनसे P की स्पर्शी पर डाले गये लम्ब क्रमशः p एवं p_1 हैं। मान लो $SP=\gamma$, $HP=\gamma_1$, तब

$$\sin\phi = \frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1},$$

क्योंकि P पर स्पर्शी SP एवं HP पर तुल्य कोण ϕ से झुकी रहती है । अब

$$\theta = \frac{vp}{\gamma^2} \text{ एवं } \dot{\theta}_1 = \frac{vp_1}{r_1^{\,2}}; \text{ दिया है कि } \dot{\theta} = \frac{C}{\gamma^2},$$

$$\therefore \qquad Vp = c$$

अत:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{vp_1}{\gamma_1} = \frac{V}{\gamma_1}\cdot\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{V}{\gamma_1}\cdot\frac{p}{r} = \frac{vp}{\gamma\cdot\gamma_1} = \frac{c}{\gamma\gamma_1} = \frac{c}{CD^2}$$

क्योंकि यदि CP का संयुग्मी व्यास CD है, तब $\gamma.\gamma_1 = CD^2$ होता है ।

विविध प्रश्नावली 30

1. किसी गतिमान कण के त्रिज्य एवं अनुप्रस्थ वेग क्रमशः $2Ka\theta$ एवं $k\gamma$ हैं । इन दिशाओं में उसके त्वरण एवं पथ का समीकरण ज्ञात करो ।

2. एक गुरिया अचर चाल से एक चिकने तार पर फिसल रहा है, तार को हृदयाभ $\gamma = a\,(1+\cos\theta)$ के आकार में मोड़ा गया है । $\dot{\theta}$ ज्ञात करो एवं सिद्ध करो कि त्रिज्य त्वरण अचर है ।

3. एक कण a त्रिज्या वाले वृत्त पर u वेग से गतिमान है । यदि वृत्त के सापेक्ष दो प्रतिलोम बिन्दुओं (inverse points) के परित: उसके कोणीय वेग ω एवं ω' हों तो सिद्ध करो कि

$$\omega + \omega = u/a$$

4. एक चका एक उर्ध्व तल में, एक क्षैतिज रेखा के अनु, बिना फिसले लुढ़क रहा है, उसके केन्द्र की चाल u है । चके की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु का वेग ज्ञात कीजिये ।

   (संकेत : यदि P परिधि पर बिन्दु है व 0 केन्द्र, त्रिज्या a है, तथा OP ऊर्ध्व से θ कोण बनाती है; P के दो वेग हैं, $a\dot{\theta} = u$, स्पर्शी की दिशा में एवं u क्षैतिज दिशा में)

5. समतल वक्र पर गतिमान एक बिन्दु की वेगवृद्धि मूल रेखा की दिशा में

तथा द्विक्-त्रिज्या के अनु वियोजित की जाती है। सिद्ध करो कि ये दो अवयव क्रमशः हैं

$$-\left(\frac{1}{\gamma \sin \theta}\right)\frac{d}{dt}(\gamma^2 \dot{\theta}),$$

एवं

$$\left(\frac{\cot \theta}{\gamma}\right)\frac{d}{dt}(\gamma^2 \dot{\theta})+\dot{\gamma}-\gamma\dot{\theta}^2$$

6. एक पिंड अचर कोणीय वेगवृद्धि a से परिभ्रमण करता है। यदि विरामावस्था से कोण θ परिभ्रमण कर चुकने पर पिंड का कोणीय वेग ω हो, तो दर्शाओ कि

$$\omega^2=2\,a\theta$$

7. वेग u से प्रक्षिप्त एक कण पर एक बल क्रिया कर रहा है, जो कण में एक अचर वेगवृद्धि f उत्पन्न करता है। यह वेगवृद्धि गतितल में गति की दिशा से सदैव अचर कोण a बनाती है। कण द्वारा परिलिखित वक्र का नैज समीकरण ज्ञात करो, एवं सिद्ध करो कि समय

$$\left(\frac{u}{f \cos a}\right)(e^{\pi \cot a}-1)$$

पर कण प्रक्षेपण दिशा के प्रतिकूल चल रहा होगा।

8. उस वक्र का नैज समीकरण (intrinsic equation) ज्ञात करो जिस पर अचर स्पर्शी वेगवृद्धि से चलने वाले बिन्दु के स्पर्शीय वेग तथा अभिलम्ब वेगवृद्धि के परिणामों का अनुपात स्थिर है।

9. एक छड़ किसी तल पर सदैव एक नियत बिन्दु से होकर जाती है और इस प्रकार घूमती है कि उसका एक छोर एक समतल बनाता है। यदि छड़ का कोणीय वेग अचर हो, तो सिद्ध करो कि किसी एक क्षण पर छड़ प्रत्येक बिन्दु की अनुप्रस्थ वेगवृद्धि समान होगी।

छड़ का सिरा कौन सा वक्र बनाये कि यह वेगवृद्धि प्रत्येक क्षण पर समान हो।

10. सिद्ध करो कि एक वक्र पर एकसमान चाल से गतिमान बिन्दु की वेगवृद्धि $\rho\dot{\psi}^2$ होती है।

एक बिन्दु एकसमान चाल से एक वृत्तजात (cycloid)

$$S=4\,a \sin \psi$$

पर गतिमान है। किसी विन्दु S पर उसकी वेगवृद्धि ज्ञात करो।

11. सिद्ध करो कि y-अक्ष के सामानान्तर एक अचर बल एवं x-अक्ष के समानान्तर y के अनुपाती बल के अन्तर्गत एक परवलय परिलिखित किया जा सकता है।

12. a त्रिज्या के वृत्त पर गतिमान एक कण की स्पर्शीय वेगवृद्धि अभिलम्ब वेदवृद्धि की λ गुनी है। यदि किसी बिन्दु पर उसका वेग u है, तो दर्शाओ कि वह उसी बिन्दु पर

$$\left(\frac{a}{\lambda u}\right)(1-e^{-2\pi\lambda})$$

समय बाद वापिस लौट आयेगा।

13. एक कण वृत्तजात पर इस प्रकार गतिमान है कि उसकी वेगवृद्धि की दिशा तथा अभिलम्ब में वही कोण बनता है, जो उसी दिशा में नापने पर स्पर्शी तथा शीर्ष पर के स्पर्शी के माध्य बनता है। सिद्ध करो कि बिन्दु पर स्पर्शी एकसमान रूप से घूमता है, तथा वेगवृद्धि का परिमाण अचर है।

14. एक बिन्दु एक परवलय पर इस प्रकार गतिमान है कि नाभि से r दूरी पर इसका वेग है

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{2f}{\gamma}\right)(\gamma^2-c^2)\right\}},$$

जहाँ f एवं c अचर है; सिद्ध करो कि इसकी वेगवृद्धि दो वेगवृद्धियों की लब्ध है—पहली f अक्ष की दिथा में एवं दूसरी

$$f\left(\frac{c^2}{\gamma^2}\right),$$

नाभि से खींची गई द्विक्‌त्रिज्या के अनु।

15. एक कण एक वृत्त जात पर इस प्रकार गतिमान है कि परिणा मी वेगवृद्धि

सदैव आधार पर लम्ब रूप रहती है। दशाओ कि वेगवृद्धि वक्रता त्रिज्या की चतुर्थ घात की व्युत्क्रमानुपाती होती है।

16 एक बल F, जो कि दिशा एवं परिणाम में अचर है, एक इकाई द्रव्यमान के गतिमान कण पर क्रिया कर रहा है। कण पर एक दूसरा बल भी क्रियाशील हैं, जिसका परिणाम उसकी चाल का G गुना है तथा उसकी दिशा अभिलम्ब की दिशा में है। कण विरामावस्था से गति प्रारम्भ करता है। दर्शाओ कि यदि F की दिशा, $\psi=0$ हो, तो पथ का नैज

समीकरण $S=\frac{4F}{G}(1-\cos\psi)$ होगा।

17. एक बिन्दु A किसी सरल रेखा पर चल रहा है, एवं एक दूसरा बिन्दु B इसकी ओर चलते हुये सदैव एक नियत दूरी पर रहता है। B का पथ ज्ञात करो और सिद्ध करो कि इसका वेग A के वेग तथा A के मार्ग पर B के प्रक्षेपण वेग का मध्यानुपाती है।

18. एक कण वक्र

$$3x=\cos^3\phi,\ 3y=\sin^3\phi$$

पर इस प्रकार गतिमान है कि स्थति $\phi=0$ से विरामावस्था से गति प्रारम्भकरके t सेकंड पश्चात उसके वेग का परिणाम a^2t है। ϕ का मान t के फलन के रूप में ज्ञात करो। यह सिद्ध करो कि वेगवृद्धि का धन x का व्युत्क्रमानुपाती है।

4.4 कार्य (Work)

जब एक बल अपने प्रयोग बिन्दु को अपनी दिशा में हटा देता है, तब हम कहते हैं कि उसने कार्य किया।

परिभाषा : किसी कण पर लगे अचर बल द्वारा किया गया कार्य, उस बल तथा उसी दिशा में कण के विस्थापन (displacement) के गुणनफल के बराबर होता है।

(i) जब बल F और विस्थापन d एक ही दिशा और सरल रेखा के अनुदिश हों, तब कार्य

$$W=Fxd$$

(ii) यदि क्रिया रेखा एक ही हो किन्तु विस्थापन बल की दिशा के विपरीत हो, तब

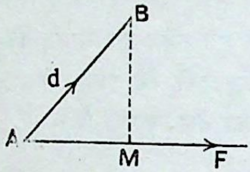
$$W = Fx(-d) = -Fxd$$

(iii) यदि विस्थापन d तथा बल F की क्रिया रेखा परस्पर θ कोण बनाती है, तब

$$W = Fx$$

बल की क्रिया रेखा के अनुविस्थापन

$$= FxAM = Fd\cos\theta$$



कार्य के मात्रक (Units of work)

(i) से० ग्रा० से० पद्धति में (C. G. S. system) कार्य का मात्रक उसकी वह मात्रा है जो एक डाइन बल अपने प्रयोग बिन्दु को अपनी दिशा में एक सेन्टीमीटर विस्थापित करने में करता है, इसे अर्ग (erg) कहते हैं। 10^7 अर्ग $= 1$ जूल

(ii) फु० पा०, से० पद्धति (E. P. S. system) में कार्य का मानक फुट-पाउन्डल है। एक फुट पाउन्डल, वह कार्य है जो एक पाउन्डल बल कण को अपनी क्रिया रेखा के अनु अपनी दिशा में एक फुट विस्थापित करने में करता है।

इस पद्धति की गुरुत्वीय इकाई (Gravitational unit) फुट-पाउन्ड है, तथा उस कार्य के बराबर होती है जो एक पाउन्ड भार का बल, कण को अपनी क्रिया रेखा के अनु एक फुट विस्थापित करने में करता है।

हमें ज्ञात है 1 पाउन्ड-भर $= 32$ पाउन्डल

अतः 1 फुट पाउन्ड $= 32$ पाउन्डल

शक्ति (Power) किसी कारक (Agent) के कार्य करने की दर को उसकी शक्ति कहते हैं, तथा इसे कारक के इकाइ समय में किये गये कार्य से नापा जाता है

अश्व शक्ति (Horse Power) = 500 फुट-पौंड/सेकंड

1 वाट (Watt) = 1 जूल/से० अर्थात् 10^7 अर्ग/से०

1 किलोवाट = 1000 वाट = 1000 जू०/से०

1 मीटरी अश्व शक्ति = 75 मीटर—किलोग्राम/से०

उदाहरण : (1) एक इंजन 50 मीटर की गहराई से 5000 ग्राम पानी प्रति मिनट उठा रहा है, इंजन की शक्ति ज्ञात करो।

यह स्पष्ट है कि m ग्राम द्रव्यमान के पिंड को h से० मी० ऊपर उठाने में उसके भार, mg डाइन के बल के विरुद्ध h से० मी० विस्थापन होगा। अतः इंजन द्वारा किया गया कार्य mgh अर्ग होगा।

इस उदाहरण में, इंजन द्वारा 1 मिनिट में किया गया कार्य

$$=(5000\times 981)\times(50\times 10) \text{ अर्ग}$$

अतः 1 सेकंड में किया गया कार्य

$$=\frac{5000\times 981\times 50\times 100}{60} \text{ अर्ग}$$

$$=\frac{5000\times 981\times 50\times 100}{60\times 10^7} \text{ जूल}$$

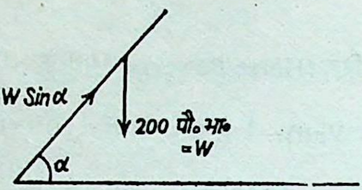
अतः इंजन की शक्ति

$$=\frac{5000\times 981\times 50\times 100}{60\times 10^7} \text{ वाट}$$

$$=40\frac{7}{8} \text{ वाट}$$

(2) एक मनुष्य 6 मील प्रति घन्टे की दर से साइकिल से एक पहाड़ी के ऊपर चढ़ रहा है, जिसका झुकाव 1 में 20 है। यदि मनुष्य और मशीन का

भार 200 पौंड भार हो, सिद्ध करो कि मनुष्य कम से कम .16 अश्व शक्ति से कार्य कर रहा है।



यदि पहाड़ी का क्षैतिज से आनत कोण α है, तब दिया है $\sin \alpha = 1/20$ मनुष्य और मशीन का भार 200 पौंड भार दिया है, जो कि ऊर्ध्वतः नीचे की ओर कार्यरत है। उसका अवयव $200 \times 1/20$ पौंड भार पहाड़ी के अनु नीचे की ओर क्रियारत है, इसी बल को मनुष्य पीछे ढकेलते हुये 6 मील प्रति घन्टे

$$= \frac{6 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}$$

फुट/से० चढ़ाई कर रहा है।

अतः एक सेकंड में किया गया कार्य

$$= 200 \times \frac{1}{20} \times \frac{6 \times 1760 \times 5}{60 \times 60}$$

$= 88$ फुट पौंड

अतः यदि मनुष्य न्यूनतम अश्व शक्ति से कार्य करता है, तब

$$X \times 550 = 88$$

$$\therefore \qquad X = \frac{88}{550} = .16$$

प्रश्नावली 31

1. कोई इंजन कुयें से पृथ्वी तल पर पानी पम्प करता है। कुयें में पानी की गहराई 42 मीटर है, तथा इंजन द्वारा प्रति सेकन्ड 7 घन मीटर पानी पम्प होता है। यदि इस कार्य को करने में इंजन की शक्ति का केवल 2/3 भाग ही काम आता है, तो इंजन की शक्ति ज्ञात करो।

2. एक आदमी 30 में 1 के ढाल वाली पहाड़ी पर ऊपर की ओर 10 मीटर प्रति सेकंड के वेग से साइकिल चला रहा है। यदि आदमी और साइकिल की संहति मिलकर 180 किलोग्राम हो, तो उसके कार्य करने की दर ज्ञात करो। (हवा और घर्षण का प्रतिरोध उपेक्षणीय है)

3. एक क्रेन (Crane) जिसकी शक्ति 80 वाट है, एक मिनट में 10 किलोग्राम की संहति को 40 मीटर उठा सकता है। यदि क्रेन पूरी शक्ति से लगातार कार्य करता रहे, तो सिद्ध करो कि एक मिनट में घर्षण आदि के कारण 876 जूल कार्य नष्ट हो जाता है।

4. विश्रांति से गिरने के 10 वें सेकंड में 1/2 पाउंड द्रव्यमान वाले पत्थर पर गुरुत्व द्वारा कृत कार्य ज्ञात करो।

5. 500 टन के द्रव्यमान की कोई रेलगाड़ी एकसमान वेग से 280 में 1 के झुकाव के ऊपर चढ़ रही है। घर्षण आदि के कारण प्रतिरोध प्रति टन 16 पाउंड है। यदि इंजन की अश्व शक्ति 200 हो और वह पूरी सामर्थ्य से काम कर रहा हो, तो ज्ञात करो कि गाड़ी किस चाल से चल रही है।

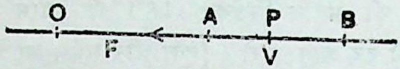
4.5 ऊर्जा (Energy)

किसी पिंड की ऊर्जा उसके कार्य करने की क्षमता को कहते हैं। इसके दो प्रकार हैं—गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा।

पिंड की गतिज ऊर्जा (Kinetic energy) वह है जो उसमें गति के कारण रहती है। इसका माप कार्य की वह मात्रा है जो पिंड बाह्य निहित बलों के विपरीत चलकर विरामावस्था पर पहुँचने में करता है। हम सिद्ध करेंगे कि m द्रव्यमान का पिंड यदि u वेग से गतिमान है, तो उसकी गतिज ऊर्जा $1/2\ mu^2$ होगी।

जब कण एक सरल रेखा में गतिमान है, मान लो उसका वेग A बिन्दु पर V है एवं एक बल के कारण, जो उसी सरल रेखा के अनु कार्यरत हैं, कण बिंदु B पर विरामावस्था पर आ जाता है। मान लो सरल रेखा पर 0 एक नियत बिन्दु है, एवं किसी बिन्दु P, जहाँ $OP=X$. पर बल F है, तथा वहाँ वेग V है। तब

$$F = mv\frac{dv}{dx}$$



जब कण अल्प दूरी dx और चलता है, तब बल F के द्वारा किया गया कार्य $-Fdx$ होगा। यदि $OA = a$, $OB = b$ तब बल के द्वारा कृत सम्पूर्ण कार्य, जब तक कण विरामावस्था पर नहीं आ जाता है, होगा

$$-\int_a^b Fdx = -\int_a^b mv\frac{dv}{dx}\ dx = -\int_V^O mvdx = \frac{1}{2}mV^2$$

यदि कण समतल में एक वक्र पर गतिमान है, तब किसी विन्दु पर उसकी गति की दिशा स्पर्शी की दिशा होती है। अतः यदि बिन्दु P पर बल का स्पर्शीय अवयव F है, जहाँ चाप $OP = S$, O वक्र पर एक नियत बिन्दु है, तब

$$F = mv\frac{dv}{dx}$$

बल के द्वारा बिंदु A (चाप $OA = a$) से बिंदु $B(OB = b)$ तक कार्य करने पर यदि कण विरामावस्था में आता है, तब कृत कार्य है—

$$-\int_a^b Fds = -\int_a^b mv\frac{dv}{ds} = -\int_v^o mvdv = \frac{1}{2}mv^2$$

परिणाम : m द्रव्यमान के कण की गतिज ऊर्जा, जिस क्षण उसका वेग v है, $\frac{1}{2}mv^2$ होगी।

पिंड की स्थितिज ऊर्जा ((Potential energy)

पिंड की स्थितिज ऊर्जा वह है जो पिंड की स्थिति के कारण उसमें निहित रहती है। हम मान लेते हैं कि किसी विशेष अवस्था में स्थित पिंड में स्थितिज ऊर्जा शून्य रहती है। इस आदर्श स्थिति को शून्य स्थिति भी कहते हैं, पिंड की स्थितिज ऊर्जा का माप कार्य की वह मात्रा है जो पिंड वर्तमान स्थिति से शून्य स्थिति पर पहुँचने में करता है।

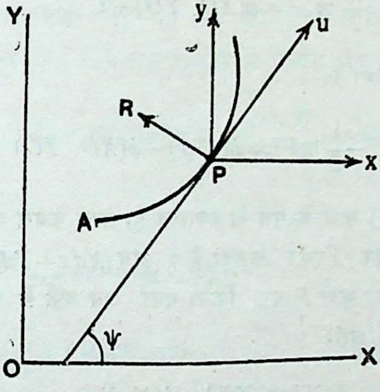
उदाहरणार्थ : किसी मुड़ी हुई कमानी (Spring) में स्थितिज ऊर्जा होती है : जैसे कि घड़ी की कमानी में जो अपने खुलने से घड़ी का चलना बनाये रखती

है। भूमि से ऊपर उठाये हुए पिंड में या टंकी में संग्रह किए हुए जल में स्थितिज ऊर्जा होती है। दबी हुई (compressed) गैस में भी स्थितिज ऊर्जा होती है।

यदि m पौंड द्रव्यमान के पिंड को भूमि से h फुट ऊँचाई पर रखा गया है, तब उसमें mgh फुट पौंड स्थितिज ऊर्जा निहित होती है, क्योंकि पिंड को जब भूमितल पर गिरने दिया जायेगा, तब उसके भार द्वारा कृत कार्य mgh फुट-पौंड होगा। भूमि को स्थितिज ऊर्जा की शून्य स्थिति मान लिया जाता है।

4.51 ऊर्जा का सिद्धान्त

एक कण एक चिकने तल पर कार्यरत दिए हुए बलों की क्रियाओं के फलस्वरूप एक वक्र पर गतिमान है। मान लो t समय पर कण P पर है, चाप



$AP=S$, जहाँ A वक्र पर एक नियत बिंदु है। मान लो P पर कण का वेग V है, कण पर कार्यरत बलों के अवयव X अक्ष एवं Y अक्ष के अनु क्रमशः X एवं Y हैं तथा P पर अभिलम्ब की दिशा में प्रतिक्रिया R है। तब गति का स्पर्शीय समीकरण होगा—

$$mv\frac{dv}{ds}=X\ cps\ \psi+Y\sin\psi$$

$$=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{de}$$

s के सापेक्ष समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{1}{2}mv^2=\int(Xdx+Ydy)+C,$$

जहाँ C अचर है।

यदि $Xdx+Ydy$ किसी फलन $\phi(x, y)$ का यथातथा अवकल (exact differential) है, तब हमें प्राप्त होगा

$$X=\frac{\partial \phi}{\partial x}, \; Y=\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

तब

$$\frac{1}{2}mv^2=\int\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy\right)+C=\phi(X, Y)+C \tag{1}$$

यदि कण ने बिंदु $(XO, \dot{Y}O)$ से V वेग से गति प्रारम्भ की है, तब

$$\frac{1}{2}mV^2=\phi(XQ, \; YO)+C \tag{2}$$

(1)—(2) से प्राप्त होगा।

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mV^2=\phi(x, y)-\phi(XO, \; YO) \tag{3}$$

यह परिणाम (2) कण के पथ से स्वतन्त्र है, तथा केवल कण की प्रारंभिक एवं अन्तिम स्थितियों पर निर्भर करता है। अब $Xdx+Ydy$ वह कार्य है जो कि, बलों X, Y के द्वारा कण P पर किया गया जब वक्र के अनु उसका अल्प-विस्थापन ds होता है। अतः

$$\int(Xdx+Ydy)=\phi(X, Y)$$

वह सम्पूर्ण कार्य है जो कि बलों के द्वारा कण के प्रक्षेप बिंदु तक पहुँचने की अवधि में उस पर किया गया।

$\phi(x, y)$ को बलों की संहति का कार्य फलन (Work function) कहते है, ऐसे बलों को संरक्षी बल (Conservative forces) कहा जाता है।

परिभाषा : संरक्षी बल इस प्रकार के हैं कि उनके द्वारा सम्पादित कार्य केवल कार्य-फलन के मूल एवं अन्तिम मानों पर ही निर्भर है अर्थात् केवल बलों के प्रारम्भिक एवं अन्तिम मानों पर ही, कण की गति के पथ पर नहीं।

अब (3) का वाम पक्ष कण की गतिज ऊर्जा में हुआ परिवर्तन दर्शाता है, तथा दायाँ पक्ष उस कार्य को दर्शाता है जो कि कण की प्रारम्भिक स्थिति से

अन्तिम स्थिति में आने में उस पर किया गया। अतः हमें महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त हुआ —

(i) ऊर्जा का सिद्धान्त : यदि बलों की संहति संरक्षी हो, तब गतिज ऊर्जा में परिवर्तन बाह्य बलों के द्वारा कृत कार्य के बराबर होता है।

(ii) ऊर्जा के संरक्षण का सिद्धान्त :

जब कोई कण बलों के संरक्षी निकाय की क्रिया के अन्तर्गत गतिमान होता है, तब किसी भी क्षण गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं का योग अचर होता है।

उत्पत्ति : अब कण की P बिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा होगी—

=बलों के द्वारा किया गया वह कार्य जो कि कण के P से किसी मानक स्थिति, मान लो बिन्दु (X_1, Y_1), तक पहुँचने में किया जायेगा

$$\int_{(x,\, y)}^{(X_1,\, Y_1)} (Xdx+Ydy)=[\phi(x,\, y)]_{(x,\, y)}^{(x_1,\, y_1)} =\phi(x_1\, y_1)-\phi(x,\, y)$$

(1) से हमें ज्ञात है

$$\frac{1}{2}\, mu^2=\phi(x,\, y)+c$$

अतः P पर गतिज ऊर्जा+स्थितिज ऊर्जा

$$=\phi(x,\, y)+c+\phi(x_1,\, y_1)-\phi(x,\, y)$$

$$=\phi(x_1,\, y_1)+e$$

जो कि अचर है, क्योंकि यह P के निर्देशांकों पर निर्भर नहीं है।

4.52 दर्शाओ कि गुरुत्वाकर्षण बज निकाय संरक्षी है।

उत्पत्ति : मान लो m का द्रव्यमान का कोई कण भूमि से h ऊँचाई पर से गुरुत्वाकर्षण बल के कारण उर्ध्वतः नीचे को गिर रहा है। माना कि कण A बिंदु से गिरकर भूमि के 0 बिंदु को प्राप्त होता है। अतः यदि X दूरी $(x<h)$ गिर कर वह P बिंदु पर है, तब P पर उसका वेग v होगा, जहाँ

$$v^2=2\, gx,$$

अतः P पर उसकी गतिज ऊर्जा

$$=\frac{1}{2}mv^2=mgx$$

तथा P पर उसकी स्थितिज ऊर्जा

$$=mg\ .\ OP=mg(h-x)$$

अतः P पर उसकी गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योग

$$=mgx+mg(h-x)=mgh$$

यह योग x से स्वतन्त्र है अतः किसी भी बिन्दु P पर इन दोनों ऊर्जाओं का योग गति काल में अचर होता है।

अतः गुरुत्वाकर्षण बल निकाय संरक्षी है।

यह ध्यान देने की बात है कि उच्चतम बिंदु A पर कण की सम्पूर्ण ऊर्जा स्थितिज है, वहाँ विरामावस्था से कण गति प्रारम्भ कर रहा है। ज्यों-ज्यों कण नीचे गिर रहा है, उसकी संचित स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में रूपान्तरित होती जाती है, तथा जब कण भूमि पर 0 बिंदु पर पहुँचता है, उसकी सम्पूर्ण ऊर्जा गतिज ऊर्जा के रूप में ही होती है।

इसी प्रकार लोलक (pendulum) का उदाहरण है। गोलक (bob) जब उच्चतम बिंदु पर तत्क्षण विश्रांत होता है, तब उसकी सम्पूर्ण ऊर्जा केवल स्थितिज होती है। जैसे गोलक नीचे को गति करता है, उसकी स्थितिज ऊर्जा घटकर गतिज ऊर्जा में परिणत होती जाती है, निम्नतम बिंदु पर सम्पूर्ण ऊर्जा गतिज होती है, तथा किसी भी क्षण दोनों ऊर्जाओं का योग अचर रहता है।

टिप्पणी : उपरोक्त दोनों उदाहरणों में हमने घर्षण बल या वायु प्रतिरोध बल को नगण्य माना है। हमने परिभाषा में देखा है कि संरक्षी बल केवल कण की स्थिति पर ही निर्भर होते हैं वे वेग या वेग की दिशा पर आश्रित नहीं होते हैं। अतः संरक्षी बलों में घर्षण या वायु प्रतिरोध सदृश बल, जो पिण्ड के वेग के किसी घात के समानुपाती हैं, सम्मिलित नहीं हैं। घर्षण बल इसमें सम्मिलित नहीं है, क्योंकि यदि कण की गति की दिशा पलट दी जाती है, तो घर्षण बल की दिशा भी पलट दी जाती है।

उदाहरण :

सिद्ध करो कि एक समान त्वरण से सरल रेखा पर गतिमान कण की गतिज ऊर्जा में mवें तथा $(m+1)$ वें सेकेण्डों में वृद्धियों का अनुपात $(2m-1):(2m+1)$ है।

मान लो कण पर एक अचर बल P लगा है जिसके कारण एकसमान त्वरण f उत्पन्न हुआ है।

mवें सेकंड में विस्थापन

$$=\frac{1}{2}f(2m-1)$$

परन्तु m सेकंड में गतिज ऊर्जा की वृद्धि

=इस सेकंड में P द्वारा किया गया कार्य।

अतः गतिज ऊर्जा m वें सेकंड में वृद्धि

$$=Px\,\frac{1}{2}f(2m-1)$$

इसी प्रकार $(m+1)$ वें सेकंड में वृद्धि

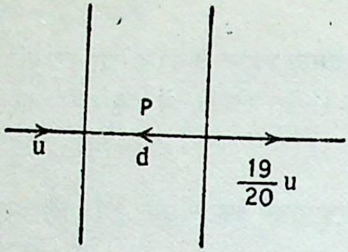
$$=Px\,\frac{1}{2}f(2m+1)$$

अतः अभीष्ट अनुपात

$$=\frac{2m-1}{2m+1}$$

2. किसी बन्दूक की गोली किसी तख्ते को पार करने में अपने वेग का 1/20 वां भाग खो देती है। बताओ कि विरामावस्था के लिये उसे ऐसे कितने तख्तों में से होकर जाना होगा, यह मानते हुए कि तख्तों का प्रतिरोध समान है।

मान लो कि सभी तख्तों की मोटाई (thickness) d है, एवं सबका समान अवरोधी बल P है। तब प्रत्येक तख्ते के द्वारा गोली के विरुद्ध किया गया



कार्य होगा $P \times d$ पहले तख्ते में यदि m द्रव्यमान की गोली u वेग से प्रवेश करती है, तब प्रवेश करते समय उसकी गतिज ऊर्जा,

$$E = \frac{1}{2} mu^2,$$

प्रश्नानुसार वेग का 1/20 वां भाग तख्ते के प्रतिरोधी बल के कारण नष्ट हो जाता है। अतः तख्ते को छेदती हुई जब गोली बाहर निकलेगी, तो उसका वेग होगा

$$U - \frac{1}{20} u = \frac{19}{20} u$$

अतः उसकी गतिज ऊर्जा होगी।

$$\frac{1}{2} m\left(\frac{19}{20}\right)^2 u^2$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{361}{400} u^2 = \frac{361}{400} E$$

अतः प्रथम तख्ते को पार करने में गोली की गतिज ऊर्जा में ह्रास

$$= E - \frac{361}{400} E = \frac{39}{400} E$$

अब ऊर्जा के सिद्धान्त से

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन = बाह्य बलों द्वारा कृत कार्य।

अतः

$$\frac{39}{400} E = P \,.\, d$$

चूंकि जब तख्ते एक सी मोटाई व एक से अवरोधी बल के हैं, अतः प्रत्येक तख्ते को पार करने में हर बार 39/400 E गतिज ऊर्जा का ह्रास होगा। स्पष्ट है कि पूरी ऊर्जा E के नष्ट होने में

$$\frac{400}{39}=10\frac{10}{39}$$

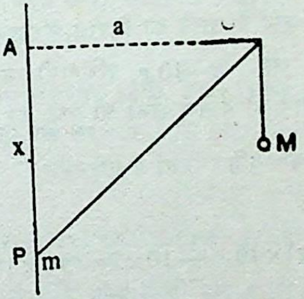
तख्तों की आवश्यकता होगी।

(3) m द्रव्यमान की एक वलय (ring) एक चिकने ऊर्ध्व छड़ पर फिसलती है, वलय एक हल्की डोरी से बँधी है जो कि छड़ से a दूरी पर स्थित खूंटी पर होकर जा रही है, डोरी के दूसरे छोर पर द्रव्यमान $M(>m)$ बंधा हुआ है। वलय को खूंटी के क्षैतिज स्तर तक लाकर छोड़ दिया जाता है। दर्शाओ कि वह प्रथम बार

$$\frac{2mMa}{M^2-m^2}$$

दूरी गिरने पर विरामावस्था में होगी।

हल : जब वलय की गति A बिंदु से प्रारम्भ होती है, उस समय संहति की गतिज ऊर्जा शून्य है, कुछ समय गति के पश्चात् जब X दूरी गिरने के बाद वलय



P पर प्रथम बार विश्रामावस्था में आती है, तब फिर संहति की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। अतः वलय की A की स्थिति एवं P की स्थिति में संहति में गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ। अतः इस अन्तराल में संहति द्वारा कृत सम्पूर्ण कार्य भी शून्य होगा। चूंकि $AP=X$, तथा वलय ऊर्ध्वतः नीचे गिर रहा है, अतः वलय के भार द्वारा कृत कार्य होगा mgx, जब वलय x दूरी नीचे गिरा है, तब द्रव्यमान

$$M(\sqrt{(x^2+a^2)}-a)$$

दूरी ऊपर गया है, अतः गुरुत्वाकर्षण द्वारा M पर किया गया कार्य

$$Mg(\sqrt{(x^2+a^2)}-a),$$

अतः संहति द्वारा कृत सम्पूर्ण कार्य को शून्य के बराबर करने पर प्राप्त होगा

$$mgx-Mg(\sqrt{(x^2+a^2)}-a)=0$$

अर्थात्

$$(mx+Md)=M(x^2+a^2)$$

वर्ग करने पर,

$$m^2\, x^2+2\, mx\, Ma+M^2\, a^2=M^2\, x^2+M^2\, a^2$$

अर्थात्

$$X=\frac{2m\, Ma}{M^2-m^2},\ x\neq 0$$

(4) विश्रामावस्था से 10 ग्राम का कोई भार 10 डेसीमीटर गिरता है और फिर रेत में 1 डेसीमीटर धँसकर विश्रान्त हो जाता है, उस पर रेत का औसत प्रणोद (average thrust) ज्ञात करो।

रेत पर गिरने पर यदि भार का वेग u है, तब

$$u^2=2g\times 10\times 10$$

रेत का अवरोधी बल R भार के धंसने का विरोध करेगा। किन्तु पिण्ड का भार धंसने में सहायक होगा। अतः $R-10\,g$, परिणामी बल होगा, जो कि 10 सेमी० तक कार्य करके भार की गतिज ऊर्जा को नष्ट कर देगा। चूंकि,

बलों द्वारा कृत कार्य=गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

अतः

$$(R-10\,g)\times 10=\frac{1}{2}\,10\times 2g\times 10\times 10$$

$$\therefore\ R=(100+10)\,g \text{ डाइन}=\mathbf{110} \text{ ग्राम भार}$$

4.53 बल का आवेग (Impulse of a force)

यदि क्षण t पर एक नियत दिशा वाले परिवर्तनशील बल का परिमाण P है, तब समय T में बल के आवेग की परिभाषा है

$$\int_0^T P\,dt$$

चूंकि

$$P=m\frac{dv}{dt},$$

अतः उपरोक्त का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा, आवेग

$$=\int_0^T m\frac{dv}{dt}\,dt=\Big[mv\Big]_0^T=mu'-mu$$

यदि T अन्तराल के प्रारम्भ और अन्त में वेग क्रमशः U' एवं V है। अतः

आवेग = बल की दिशा में T समय में संवेग में परिवर्तन।

यदि P अचर है, तब

$$P\,.\,T=mu'-mu$$

अब यदि P अनन्त रूप से बड़ा हो जाता है, तथा T अनन्त सूक्ष्म हो जाये, इस प्रकार से कि समाकल

$$\int_0^T P\,dt$$

का परिमित मान I रहे, तब P आवेगी बल (Impulsive force) कहलाता है, तथा I संवेग में परिवर्तन $m(u'-u)$ दर्शाता है। आवेगी बल का उदाहरण हथौड़े की चोट से दिया जा सकता है।

किसी परिमित बल का माप उसके द्वारा समय की इकाई उत्पन्न संवेग होता है, पर किसी आवेगी बल का माप उसके द्वारा अत्यन्त उल्प काल में उत्पन्न सम्पूर्ण संवेग होता है।

4.54 **रैखिक संवेग संरक्षण** (Conservation of Linear Momentum)

यदि m द्रव्यमान का कोई पिंड किसी बल F की क्रिया के कारण उसकी क्रिया रेखा में v से गतिमान है, तब हमें न्यूटन के गति के दूसरे नियम से ज्ञात है कि

$$\frac{d}{dt}(mv)=F$$

यदि $F=0$, तब

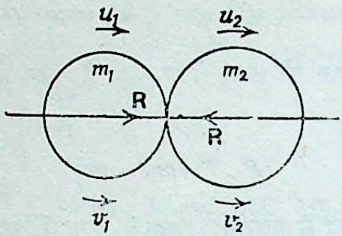
$$\frac{d}{dt}(mv)=0$$

अर्थात् mv अचर हैं।

अतः पिंड अचर संवेग से गतिमान होगा ।

4.55 संवेग संरक्षण का सिद्धान्त (Law of Conservation of Momentum)

मान लो एक ही सरल रेखा में गतिमान m_1, m_2 द्रव्यमान के दो चिकने गोले U_1, U_2 वेग से परस्पर संघात (Impact) करते हैं, तथा संघात के पश्चात्



उनके वेग V_1, V_2 हो जाते हैं । न्यूटन के तीसरे गति के नियमानुसार संघात होने पर m_1, m_2 पर मान लो R बल से क्रिया करेगा, तथा m_2, m_1 पर ठीक इसके विपरीत एवं तुल्य प्रतिक्रिया करेगा । अतः गति की दिशा में, जो कि दोनों गोलों के केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा है, सम्पूर्ण बल शून्य होगा । अंतः

$$\frac{d}{dt}(m_1 u_1 + m_2 u_2) = 0$$

अर्थात्

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = \text{अचर} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

संघात के पूर्व संहति का संवेग = संघात के पश्चात् का संवेग ।
यही रैखिक संवेग संरक्षण का सिद्धान्त है ।

उदाहरण :

(1) m द्रव्यमान की एक गोली M द्रव्यमान के स्थिर (fixed) लक्ष्य में S दूरी तक धंसती है । यदि लक्ष्य गति के लिए स्वतन्त्र हो, और प्रतिरोध एक-समान हो, तो सिद्ध करो कि गोली तब केवल

$$\frac{MS}{M+m}$$

दूरी तक ही धंसेगी ।

मान लो गोली पर एकसमान अवरोधी बल R लगता है, तथा वह u वेग से स्थिर लक्ष्य से टकराती है, फिर S दूरी तक धंसकर विरामावस्था में आ जाती है। ऊर्जा के सिद्धान्त से प्राप्त होगा।

अवरोधी बल द्वारा कृत कार्य=गतिज ऊर्जा का ह्रास

$$\therefore \quad RS=\frac{1}{2}\ mu^2 \tag{1}$$

दूसरी स्थिति में गोली के लक्ष्य में धंसने के बाद यदि दोनों का उभयनिष्ठ वेग V है, तब संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से हमें प्राप्त होगा

$$mu=(m+M)\ V,$$

अर्थात्

$$V=\frac{m}{m+M}\ u$$

इस स्थिति में यदि धंसी हुई दूरी S' हो तो

$$R\ .\ S'=\frac{1}{2}\ mu^2-\frac{1}{2}(m+M)\ V^2$$

$$=\frac{1}{2}\ mu^2-\frac{1}{2}\ \frac{m^2}{(M+m)}\ u^2$$

अतः (i) से R का मान रखने पर

$$S'=\frac{M}{M+m}\ S$$

(2) M द्रव्यमान की एक तोप एक गाड़ी पर रखी है। तोपगाड़ी एक चिकने क्षैतिज तल पर चल सकती है। तोप क्षितिज से कोण α पर आनत है। उससे एक गोला दागा जाता है जो क्षितिज से कोण θ बनाता हुआ निकलता है। यदि गोले का द्रव्यमान m है, तो सिद्ध करो कि—

$$\tan\theta=\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

मान लो गोले का तोप के सापेक्ष वेग u है, जो कि नली के अनु है, तथा तोप एवं गाड़ी का पीछे की ओर क्षैतिज वेग v है। मान लो गोले का वास्तविक वेग v है, जो क्षितिज से θ कोण बनाता है। अतः गोले का वेग v दो वेगों के

संयोजन से प्राप्त होगा—पहला वेग u नली के अनु तथा क्षितिज से कोण α बनाते हुए, दूसरा वेग v, क्षैतिज दिशा में पीछे की ओर।
अत: गोले का वास्तविक क्षैतिज वेग

$$=V \cos \theta=U \cos \alpha-v \qquad \text{(i)}$$

तथा वास्तविक ऊर्ध्वाधर वेग

$$=V \sin \theta=u \sin \alpha \qquad \text{(ii)}$$

अब क्योंकि विस्फोट के कारण गोले पर आवेगी बल तोप तथा गाड़ी पर के आवेगी बल के बराबर तथा उसकी विपरीत दिशा में है, अतएव इन बलों के क्षैतिज अवयव भी बराबर होंगे; इसलिए

$$Mv=m(u \cos \alpha-v)$$

अर्थात्

$$v=\frac{mu}{M+m} \cos \alpha$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर, तथा v का उपरोक्त मान रखने पर प्राप्त होगा—

$$\tan \theta=\frac{u \sin \alpha}{u \cos \alpha-v}=\frac{u \sin \alpha}{u \cos \alpha-\dfrac{Mu}{(M+m)} \cos \alpha}$$

$$=\frac{(M+m)}{M} \tan \alpha=\left(1+\frac{m}{M}\right) \tan \alpha$$

विविध प्रश्नावली 32

1. एक पिंड 980 से० मी०/सें० वेग से भूमि से ऊर्ध्वारत: ऊपर प्रक्षेप किया गया। ज्ञात करो कि किस ऊंचाई पर उसकी गतिज ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होगी।

2. 1200 डेसि०मी०/सि० वेग से 5 ग्राम्य द्रव्यमान की गोली लक्ष्य पर चलाई जाती है। लक्ष्य का द्रव्यमान 400 ग्राम है और वह चलने में स्वतन्त्र है। दर्शाओ कि गतिज ऊर्जा का 80/81 भाग का ह्रास हो जाता है।

3. एक M द्रव्यमान की बन्दूक से m द्रव्यमान की गोली बन्दूक के सापेक्ष u वेग से छूटती है। दर्शाओ कि बन्दूक एवं गोली के वास्तविक वेग हैं तथा उनकी गतिज ऊर्जायें उनके

$$\frac{mu}{(M+m)} \text{ एवं } \frac{Mu}{(M+m)}$$

द्रव्यमानों की व्युत्क्रमानुपाती हैं।

4. 1 टन द्रव्यमान की तोप 25 किलोग्राम का गोला फेंकती है और पीछे की ओर एक चिकने नत समतल पर 5 मीटर की ऊंचाई तक चढ़ जाती है। गोले का प्रारम्भिक वेग ज्ञात करो।

5. m द्रव्यमान की एक गोली एक निश्चित वेग से चलती हुई एक M द्रव्य मान वाले लक्ष्य से, जो गोली की दिशा में चलने को स्वतन्त्र है, टकराकर उसमें जड़ जाती है। दर्शाओ कि संघात से गतिज ऊर्जा का $M/m+M$ भाग नष्ट हो जाता है।

6. एक सम डोरी, जिसका द्रव्यमान M और लम्बाई $2a$ है, एक चिकनी खूँटी पर सममित रूप से रखी गई तथा उसके छोरों पर m एवं m' द्रव्यमान के कण बंधे हैं। जब डोरी खूंटी छोड़ देती है, तब दर्शाइये कि उसका वेग होगा

$$\sqrt{\left(\frac{M+2(m-m')}{M+m+m'}\, ag\right)}$$

7. सिद्ध करो कि एक अचर बल के अन्तर्गत गतिमान m द्रव्यमान के कण की किसी समय अन्तराल में माध्य गतिज ऊर्जा होगी

$$\frac{1}{6}\, m \left(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2\right)$$

जहाँ u_1 एवं u_2 अन्तराल के प्रारम्भिक एवं अन्तिम वेग हैं।

(संकेत : यदि अन्तराल T है, तथा अचर त्वरण f है, तब

$$\text{माध्य ग० ऊ०} = \frac{m}{2T}\int_0^T v^2\, dt, \text{ जहाँ } V = u_1 + ft)$$

8. M ग्राम द्रव्यमान का हथौड़ा h से॰ मी॰ ऊंचाई से m ग्राम द्रव्यमान वाले एक स्थूण (pile) के शिखर पर गिरता है और उसे भूमि में a सें॰ मी॰ धंसा देता है; भूमि का प्रतिरोध ज्ञात करो, जबकि यह माना गया है यह प्रतिरोध अचर है, और स्थूण अप्रत्यास्थ (inelastic) है ।

9. $2l$ लम्बाई वाली भारी समांग डोरी एक छोटे चिकने स्थिर घिरनी पर इस प्रकार लटकी है कि $l+c$ लम्बाई एक तरफ लटकी है, तथा $l-c$ दूसरी तरफ । यदि छोटे हिस्से के छोर को पकड़कर रखा जाये, व फिर छोड़ा जाये, तो दर्शाओ कि डोरी

$$\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)} \cosh^{-1}\left(\frac{l}{c}\right)$$

समय पश्चात् घिरनी को छोड़ देगी ।

10. द्रव्यमान का एक कोष (Shell) V वेग से गतिमान है । एक आन्तरिक विस्फोट से ऊर्जा उत्पन्न होती है एवं कोष को दो भागों में तोड़ देती है, जिनके द्रव्यमान $m_1 : m_2$ हैं । दोनों टुकड़े कोष की गति की मूल रेखा में गति करते रहते हैं । दर्शाओं कि उनके वेग हैं

$$V+\sqrt{\left(\frac{2m_2E}{m_1M}\right)} \text{ एवं } V-\sqrt{\left(\frac{2m_1E}{m_2M}\right)}$$

(संकेत : विस्फोट के पश्चात् दो भागों में द्रव्यमान हैं

$$\frac{Mk}{1+k}=m_1 \text{ एवं } \frac{M}{(1+k)}=m_2$$

मान लो । यदि इसके वेग V_1 एवं V_2 हैं, तब संवेग संरक्षण से

$$MV=m_1v_1+m_2v_2 \tag{1}$$

ऊर्जा के सिद्धान्त से

$$E+\tfrac{1}{2}MV^2=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{2}$$

समीकरण (1) एवं (2) को हल करके V_1 एव V_2 प्राप्त होगा)

11. कोई द्रव्यमान m स्वतन्त्रतापूर्वक a सें० मी० गिर कर अपने से बड़े द्रव्यमान M को, जो स्थिर घिरनी पर से होकर जाने वाली एक अवितान्य डोरी द्वारा उससे सम्बद्ध है, उठाता है। दर्शाओ कि

$$\frac{2m}{M-m}\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$$

समय पश्चात् M अपनी प्रारम्भिक स्थिति में फिर लौट आयेगा।

यह भी ज्ञात करो कि झटका लगते ही ऊर्जा के कितने भाग (fraction) का ह्रास हुआ।

अयाध्य 5

प्रक्षेप्य

(Projectile)

5.1 एक तल में किसी बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिये हमें तल की दो नियत अक्षों के सन्दर्भ में उसके निर्देशांक जानना आवश्यक है। अतः उन दो निर्देशांकों को प्राप्त करने के लिये हमें गति के दो समीकरणों की आवश्यकता होगी। यदि ये अक्ष सामान्य निर्देशांक अक्ष ही ले ली जायें तो गति के द्वितीय नियम से हमें गति के निम्न समीकरण प्राप्त होंगे।

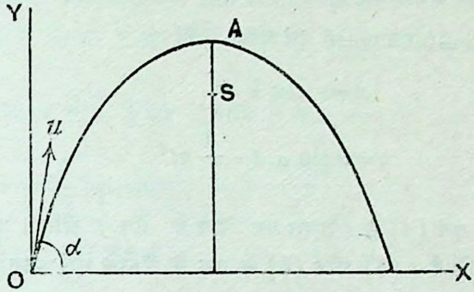
$$m\ddot{x}=X,\ m\ddot{y}=Y$$

जहाँ X, Y कण पर क्रियारत बलों x एवं y के अक्षों के अनु अवयवों के योग हैं। इनमें से प्रत्येक समीकरण को दो बार समाकलन करने पर, हमें द्रो समीकरण प्राप्त होंगे जिनमें 4 अचर राशियां समाहित होंगी। प्रश्न के प्रारम्भिक प्रतिबन्धों की सहायता से इन अचरों को ज्ञात किया जा सकता है। फिर इन दो समीकरणों से t का विलोपन करके, हम x एवं y में सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं। यही कण के पथ का समीकरण होगा।

5.11 **निर्वात (Vacuum)** : में किसी प्रक्षेप्य का पथ परवलय होता है। m द्रव्यमान का एक कण u वेग से, क्षैतिज से α के आनति पर शून्य

में प्रक्षिप्त किया गया है, उसकी गति एवं परिलिखित पथ का समीकरण ज्ञात करना।

प्रक्षेप विन्दु O को मूल विन्दु मानकर, O से क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर रेखाओं को क्रमशः x अक्ष एवं y अक्ष मान लें। गति उस ऊर्ध्वाधर तल में होगी जिसमें नियामक अक्ष स्थित हैं।



मान लो t समय पर कण $P(x, y)$ पर स्थित है।

कण की गति पर प्रभाव डालने वाला एकमात्र बल है उसका भार जो कि ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर (वायु का गतिरोध उपेक्षणीय है) अतः गति के समीकरण होंगे—

$$m\ddot{x}=0$$

एवं

$$m\ddot{x} = -mg$$

अर्थात्

$$\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

एवं

$$\ddot{y} = -g \qquad (2)$$

क्योंकि गुरुत्वीय त्वरण नीचे की ओर है, जबकि $\ddot{y}$ की धनात्मक दिशा ऊपर की ओर है।

(1) एवं (2) का समाकलन करने पर, तथा इस प्रतिबन्ध का उपयोग करने पर कि $t=0$,

पर $\dot{x}=u \cos \alpha,$

$$\dot{y}=u \sin \alpha$$

हमें प्राप्त होगा

$$\dot{x}=u \cos \alpha, \qquad \text{एक अचर} \tag{3}$$

$$\dot{y}=u \sin \alpha-gt \tag{4}$$

(3) एवं (4) का समाकलन करने पर, तथा इस प्रतिबन्ध का उपयोग करने पर कि $t=0$, पर $x=0$ एवं $y=0$ हमें प्राप्त होगा

$$x=u \cos \alpha \,.\, t \tag{5}$$

$$y=u \sin \alpha, t-\frac{1}{2} gt^2 \tag{6}$$

समीकरण (3) एवं (4) से t समय पर कण के वेग के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर अवयव प्राप्त होते हैं। (5) और (6) से कण के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर दिशाओं में कण के t समय पर विस्थापन प्राप्त होते हैं।

(5) और (6) की सहायता से t का विलोपन करने पर हमें प्राप्त होगा

$$y=x \tan \alpha-\frac{1}{2} g \frac{X^2}{u^2 \cos^2 \alpha} \tag{7}$$

यही कण का पथ है। चूंकि यह समीकरण x में द्विघाती है एवं y में एकघाती, अतः यह परवलय है। इसकी अक्ष ऊर्ध्वाधर है, तथा शीर्ष उपर की ओर है।

अतः निर्वात में प्रक्षेप्य का मार्ग परवलय होता है।

5.12 समीकरण (7) को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$X^2-2\frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \, x=-2\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g} y$$

अर्थात्

$$\left(X-\frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha\right)^2=-2\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g}\left(y-\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right) \tag{8}$$

अतः शीर्ष है

$$X=\frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, y=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

नाभिलम्ब (latus rectum) है

$$=2\,\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g} \tag{9}$$

(8) के दायें पक्ष का ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि परवलय की अवतलता (concavity) नीचे की ओर है ।

चूंकि $u \cos \alpha$ कण का अचर क्षैतिज वेग है, अत: (9) से ज्ञात होता है कि वे सभी परवलय जिनके क्षैतिज वेग समान हैं, बराबर होते हैं ।

नाभि—यदि A शीर्ष है एवं S नाभि है, तब

$$AS=\frac{1}{4}\,(\text{नाभिलम्ब}) = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$\therefore$ OX रेखा से नाभि की ऊँचाई

$$=\text{शीर्ष } A \text{ की ऊँचाई}-\frac{1}{4}\text{ नाभिलम्ब}$$

$$=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}-\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}=-\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

अत: नाभि, S, के निर्देशांक है

$$\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g},\ -\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right)$$

अत: इसका निर्णयकी क्षैतिज रेखा OX के ऊपर, उस पर या उसके नीचे हैं, इससे होगा कि

$$-\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक है, अर्थात् इसके अनुसार कि कोण α का मान $\pi/4$ से बड़ा है, उसके बराबर या उससे छोटा है ।

परवलय की नियता (directrix) x-अक्ष के समानान्तर है, तथा OX से नियता की ऊँचाई

$$=\text{शीर्ष } A \text{ की ऊँचाई}+\frac{1}{4}\text{ नाभि लम्ब}$$

$$=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}+\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}=\frac{u^2}{2g}$$

अत: नियता का समीकरण है $y=u^2/2g$.

चूंकि उपरोक्त परिणाम α से स्वतन्त्र है, अतः उन सब प्रक्षेप पथों की, जिनके प्रक्षेपण विन्दु तथा प्रारम्भिक वेग समान होते हैं, एक ही नियता होती है।

अब $OS=O$ की नियता से दूरी$=u^2/2g$ तथा O परवलय पर स्पर्शी, जो कि u की दिशा है, OS एवं OY के बीच के कोण की अर्द्धक है। अतः

$$\angle SOX=\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{\pi}{2}$$

अत: नाभि S के ध्रुवीय निर्देशांक—यदि O ध्रुव हो एवं OX मूल रेखा हो, तो

$$\left(\frac{u^3}{2g},\ 2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

5.13 उड्डयन काल T

वह समय है जो कि कण को प्रक्षेप बिन्दु O से गुजरने वाले क्षैतिज समतल पर पहुँचने में लगता है।

(6) $y=0$ रखने पर हमें प्राप्त होगा

$$u \sin \alpha \,.\, t-\frac{1}{2}\, gt^2=0$$

अत: $t=0$ या

$$t=\frac{2u \sin \alpha}{g}$$

चूँकि $t=0$ से प्रक्षेप बिन्दु प्राप्त होगा, अत: $t\neq 0$

$$T=\frac{2u \sin \alpha}{g}$$

क्षैतिज परास R-उड्डयन काल T में कण से जो क्षैतिज दूरी चली, उसे क्षैतिज परास कहते हैं। चूँकि कण का क्षैतिज वेग अचर है, $u \cos \alpha$

अत:

$$R=u \cos \alpha,\ T=u \cos \alpha .\ \frac{2u \sin \alpha}{g}=\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$$

चूँकि

$$R=\frac{2}{g}\ (u\cos\alpha).(u\sin\alpha)$$

$$=\frac{2}{g}\ \text{(प्रक्षेप वेग का क्षैतिज अवयव) (प्रक्षेप वेग का ऊर्ध्वं अवयव)}$$

स्पष्टत: महत्तम क्षैतिज परास के लिये

$$\sin 2\alpha=1,$$

अर्थात्

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}\ \text{या}\ \alpha=\frac{\pi}{4}$$

और तब महत्तम परास $=u^2/g$.

चूँकि नाभि के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g},\ -\ \frac{u^2\cos 2\alpha}{2g}\right)$$

तथा $\cos\pi/2=0$, अत: जब परास महत्तम रहेगी, तब नाभि परास पर ही रहेगी।

प्रक्षेप कोण α एवं $\pi/2-\alpha$ के लिये क्षैतिज परास तुल्य रहेगी, यदि प्रक्षेप वेग वही है क्योंकि

$$R=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha\ \ R'=\frac{u^2}{g}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

एवं

$$=\frac{u^2}{g}\ \sin 2\alpha$$

महत्तम ऊँचाई H, उच्चतम बिन्दु पर ऊर्ध्व वेग शून्य होगा, अतः (4) से प्राप्त होगा

$$0=u\sin\alpha-gt$$

अर्थात्

$$t=\frac{u\sin\alpha}{g}$$

तब (6) से

$$H=u\sin\alpha\ .\ \frac{u\sin\alpha}{g}-\frac{1}{2}\ g\ \frac{u^2\sin^2\alpha}{g^2}=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

यही शीर्ष की कोटि भी है।

नाभियों का बिन्दुपथ : चूँकि नाभि के निर्देशांक हैं

$$S=\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, -\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right)$$

अतः यदि प्रक्षेप वेग u नियत है, तो भिन्न प्रक्षेप कोणों पर बने सभी प्रक्षेप्यों के नाभियों का बिन्दु पथ एक वृत्त होगा जिसकी त्रिज्या होगी $u^2/2g$.

5.14 प्रक्षेप्य के किसी बिन्दु पर वेग

नियता से बिन्दु तक गिरने से उत्पन्न वेग के बराबर होता है। मान लो किसी बिन्दु P पर वेग V हो, तो उसकी दिशा P पर स्पर्शी के अनु होगी, मान लो क्षैतिज से इसकी आनित θ है, तब

$$V \cos \theta=\dot{x}=u \cos \alpha$$

$$V \sin \theta=\dot{y}=u \sin \alpha-gt$$

$$\therefore \qquad \tan \theta=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{u \sin \alpha-gt}{u \cos \alpha}$$

तथा

$$V^2=u^2 \cos^2 \alpha+(u \sin \alpha-gt)^2$$

$$=u^2-2u \sin \alpha \,.\, gt+g^2t^2$$

$$=u^2-2g\left(u \sin \alpha \,.\, t-\frac{1}{2} gt\right)=u^2-2gy$$

$$=2g\left(\frac{u^2}{2g}-y\right)$$

$=2g$ (नियता की 0 से ऊँचाई —P की कोटि)

$=2gx$ (P के ऊपर नियता की उँचाई)

अत: किसी बिन्दु पर वेग का परिमाण वही है जो कि नियता के उस बिन्दु तक स्वतन्त्रतापूर्वक गिरने से प्राप्त होगा।

उदाहरण : 1 यदि प्रक्षेप वेग u है, तो एक ही तल में विभिन्न प्रक्षेप्य पथों के शीर्षों का बिन्दु पथ ज्ञात करो।

जब प्रक्षेप कोण a हो, तब मान लो शीर्ष के निर्देशांक (h, k) हैं । अत:

$$h=\frac{u^2 \sin 2a}{2g}, k=\frac{u^2 \sin^2 a}{2g}=\frac{u^2}{4g}(1-\cos 2a)$$

$$\therefore \qquad \sin 2a=\frac{2g}{u^2} h, \cos 2a=1-\frac{4g}{u^2} K$$

दोनों का वर्ग करके जोड़ने पर a का विलोपन हो जायेगा, तब हमें प्राप्त होगा

$$\frac{4g^2}{u^4} h^2+\left(\frac{u^2-4gk}{u^2}\right)^2=1$$

अत: शीर्ष का बिन्दु पथ होगा

$$\frac{4g^2}{u^4} x^2+\left(1-\frac{4g}{u^2} y\right)^2=1$$

जो कि एक दीर्घ वृत्त है; जिसका केन्द्र $(0, u^2/4g)$ है ।

(2) यदि अपने पथ के किसी बिन्दु P तक पहुंचने के लिये किसी प्रक्षेप्य को t समय लगे, और P से प्रक्षेप बिन्दुगत क्षैतिज समतल पर पहुँचने में t' समय लगे, तो दर्शाओ कि समतल से P की ऊँचाई $\frac{1}{2}gtt'$ होगी ।

मान लो कण को u वेग से क्षैतिज से a कोण पर प्रक्षिप्त किया गया । यदि बिन्दु P तक पहुँचने में t समय व P से क्षैतिज समतल तक पहुंचने में t' समय लगे, तब उड्डयन काल,

$$T=t+t'=\frac{2u \sin a}{g} \qquad (1)$$

यदि बिन्दु P की क्षैतिज तल से ऊंचाई h है, तब

$$h=u \sin a \,.\, t-\frac{1}{2} gt^2$$

$$=g\left(\frac{t+t'}{2}\right) t-\frac{1}{2} gt^2=\frac{1}{2} gtt'$$

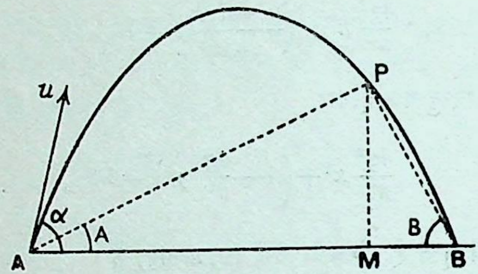
(3) एक कण को किसी ऊर्ध्वाधर समतल में स्थित त्रिभुज के क्षैतिज आधार के एक सिरे से इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि वह त्रिभुज के शीर्ष

को स्पर्श करता हुआ आधार के दूसरे सिरे पर गिरता है। यदि A एवं B त्रिभुज के आधार के कोण हों तथा α प्रक्षेप कोण हो, तो सिद्ध करो

$$\tan \alpha = \tan A + \tan B$$

मान लो u प्रक्षेप वेग है। स्पष्टतः क्षैतिज समतल पर परास AB है।

$$\therefore \qquad AB = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$



यदि P विन्दु (x, y) है, तब

$$\tan A + \tan B = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-X} = y\, \frac{R-X+X}{X(R-X)}$$

$$= \frac{y}{x}\ \frac{R}{R-x}$$

किन्तु

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2}\ \frac{gX^2}{u^2 \operatorname{eos}^2 \alpha}$$

अतः

$$\tan A + \tan B = \left(\tan \alpha - \frac{1}{2}\ g \frac{x}{u^2 \cos^2 \alpha}\right) \frac{\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha}{\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{\alpha} - x\right)}$$

$$= \tan \alpha . \left(\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha - x\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{u^3}{g} \sin 2\alpha - x\right)}$$

$$= \tan \alpha$$

(4) समुद्र तल से एक तोप समुद्र की तरफ गोले बरसा रही है। इस h फुट

ऊंची एक तोपगाड़ी पर चढ़ाया जाता है और यह उसी कोण α पर गोले दागती है। यदि प्रक्षेप वेग u हो, तो सिद्ध करो कि परास पहिये की परास से

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{2gh}{u^2 \sin^2 \alpha}\right)^{1/2}-1\right\}$$

गुना अधिक बढ़ जाती है।

मान लो दो स्थितियों में परास क्रमश: R, R_1 हैं।

तब

$$R=\left(\frac{Ru^2 \cos \alpha \, . \sin \alpha}{g}\right) \qquad (1)$$

दूसरी स्थिति में बिन्दु $(R_1, -h)$ उस वक्र पर स्थित है, जिसका समीकरण है

$$y=x \tan \alpha-\left(\frac{gx^2}{2u^2}\right) \sec^2 \alpha$$

अत:

$$-h=R_1 \tan \alpha-\frac{gR_1^2}{2u^2} \sec^2 \alpha$$

इसे R_1 में द्विपद समीकरण के समान हल करने पर, तथा करणी के पहिले केवल धन चिह्न लगाने पर, हमें प्राप्त होगा—

$$R_1=\frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}+\frac{u^9 \sin \alpha \cos \alpha}{g}\sqrt{\left(\left\{1+\frac{2hg}{u^2 \sin^2 \alpha}\right\}\right)}$$

तब (1) से प्राप्त होगा—

$$R_1=\frac{1}{R} R\left\{1-\sqrt{\left(\left(1+\frac{2gh}{u^2 \sin^2 \alpha}\right)\right\}}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{R_1}{R}-1=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{2gh}{u^2 \sin^2 \alpha}\right)^{1/2}-1\right\}$$

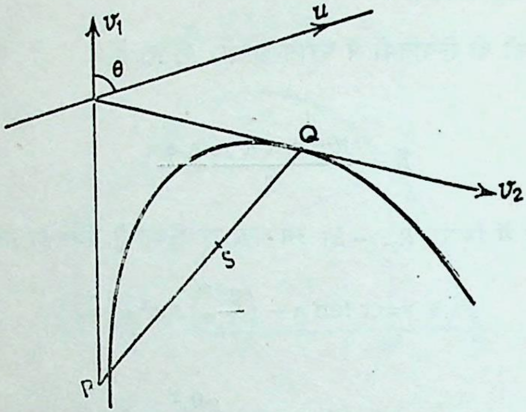
अत:

$$\frac{R_1-R}{R}=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{2gh}{u^2 \sin^2 \alpha}\right)^{1/2}-1\right\}$$

(5) एक प्रक्षेप पथ की किसी नाभिगत जीवा (focal chord) के छोरों पर यदि वेग V_1 एवं V_2 हों, तथा वेग का क्षैतिज अवयव u हो, तो दर्शाओ कि

$$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}=\frac{1}{u^2}$$

मान लो PQ एक नाभिगत जीवा है, तब P एवं Q के स्पर्शी नियता पर परस्पर लम्बवत काटते हैं । यदि v_1 की दिशा क्षैतिज से θ कोण बना रही है, तब



v_2 की दिशा क्षैतिज से $\pi/2-\theta$ कोण पर झुकी रहेगी । वेगों के क्षैतिज अवयव अचर रहते हैं, अतः

$$V_1 \cos\theta=u,$$

तथा

$$V_2 \sin\theta=u$$

$$\therefore \quad \frac{u^2}{u_1^2}+\frac{u^2}{v_2^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

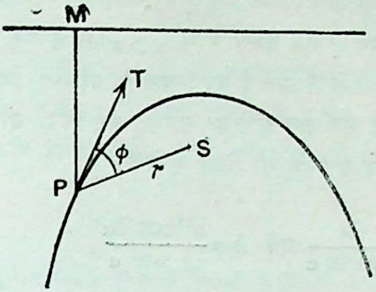
अतः

$$\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v^2_2}=\frac{1}{u^2}$$

(6) एक कण P गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत एक परवलय पर गतिमान है । सिद्ध करो कि पथ की नाभि के परितः P का कोणीय वेग नाभि से उसकी दूरी का व्युत्क्रमानुपाती है । P पर वेग v की दिशा स्पर्शी PT की दिशा में होगी । हमें परवलय का गुणधर्म ज्ञात है कि स्पर्शी PT द्वि-त्रिज्या PS एवं नियता पर लम्ब PM के मध्य के कोण की अर्द्धक होती है । अतः

$$\angle SPT=TPM=\phi$$

स्पष्ट है कि स्पर्शी PT की दिशा नियता से (अर्थात् क्षैतिज से) $\pi/2-\phi$ कोण बनायेगी । अतः P के वेग v का क्षैतिज अवयव है ।



$$V\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=V\sin\phi=u$$

मान लो, अचर राशि ।

हमें अनुच्छेद 4.23 से ज्ञात है कि P का नाभि S के परितः कोणीय वेग

$$=\frac{V\sin\phi}{r}=\frac{u}{r},$$

जहाँ

$$r=SP$$

अतः सिद्ध हुआ कि P पर नाभि के परितः कोणीय वेग SP का व्युत्क्रमानुपाती है ।

प्रश्नावली 33

1. यदि परवलीय मार्ग के किसी विन्दु पर वेग v हो और क्षितिज से झुकाव θ हो, तो दर्शाओ कि

$$\frac{v}{g\sin\theta}$$

समय पश्चात् कण अपनी पहली दिशा से समकोण पर गतिमान होगा ।

2. किसी परवलीय पथ के चाप के छोरों पर के स्पर्शियों के बीच का कोण a है, इन छोरों पर वेग v एवं v' है, तथा u उनका क्षैतिज अवयव है, सिद्ध करो कि इस चाप पर गति करने में लगा समय है—

$$(v\,v'\sin a)/gu$$

3. एक ही तल में एक ही बिन्दु से कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किये जाते हैं कि उन सबके परवलय तुल्य है । सिद्ध करो कि उनसे शीर्षों का बिन्दुपथ एक परवलय है ।

4. एक कण u वेग से एवं प्रक्षेप कोण $\alpha(>\pi/4)$ से एक बिन्दु 0 से, जो कि क्षैतिज समतल से h ऊंचाई पर स्थित है, प्रक्षिप्त किया गया है । यदि t समय पश्चात् जब कण क्षैतिज समतल पर गिरे, तो उसकी दिशा प्रक्षेप दिशा के लम्ब रूप हो, तो सिद्ध करो कि

$$t=\frac{u}{g \sin \alpha} \text{ एवं } h=\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g \sin^2 \alpha}$$

5. एक ही ऊध्र्वाधर तल में, एक ही विन्दु से आरम्भ होने वाले प्रक्षेप पथों की नाभियों का बिन्दुपथ ज्ञात करो, जब

(i) सब में वेग के क्षैतिज अवयव समान हैं,

(ii) प्रत्येक में प्रक्षेप वेग का ऊर्ध्वाधर अवयव समान हैं;

(iii) क्षैतिज समतल पर सब का उड्डयन काल समान है ।

6. सिद्ध करो कि किसी प्रक्षेप पथ में किसी बिन्दु पर वेग वही होगा जो इस बिन्दु पर के स्पर्शी के समानान्तर नाभीय जीवा (focal chord) की लम्बाई की चौथाई ऊंचाई से गिरने पर उत्पन्न होगा ।

7. प्रक्षेप बिन्दु से होकर जाने वाले क्षैतिज समतल पर स्थित एक लक्ष्य पर निशाना लगाया जाता है । जब गोली α प्रक्षेप कोण पर प्रक्षिप्त की जाती है, तो वह लक्ष्य से a से०मी० इधर ही रह जाती है और जब β कोण पर प्रक्षिप्त की जाती है, तो लक्ष्य में b से० मी० आगे जा गिरती है । सिद्ध करो कि यदि प्रत्येक दिशा में प्रक्षेप वेग समान हो, तो उपयुक्त प्रक्षेप कोण होगा—

$$\frac{1}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{a \sin 2\beta+b \sin 2\alpha}{a+b}\right\}$$

8. एक ही ऊध्र्वाधर तल में तीन कण एक ही बिन्दु से प्रक्षिप्त किये जाते हैं । इनके प्रक्षेपण वेग क्रमशः V_1, V_2, V_3 हैं, तथा प्रक्षेपण कोण क्रमशः

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ हैं। सिद्ध करो कि उनके पथों की नाभियां एक ही सरल रेखा पर स्थित होंगी, यदि

$$\frac{\sin 2(\beta_2-\beta_3)}{V_1^2}+\frac{\sin 2(\beta_3-\beta_1)}{V_2^2}+\frac{\sin 2(\beta_1-\beta_2)}{V_3^2}=0.$$

9. एक कण प्रक्षेप बिन्दु से x दूरी पर स्थित दीवार को स्पर्श करता हुआ पार करता है, तथा दूसरी ओर दीवार से y दूरी पर क्षैतिज तल पर गिरता है। यदि प्रक्षेप कोण $\pi/4$ हो, तो सिद्ध करो कि दीवार की ऊंचाई होगी

$$xy/(x+y)$$

10. एक कण p गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत एक परवलय पर गतिमान है। सिद्ध करो कि P को नाभि से जोड़ने वाली रेखा का कोणीय वेग $2\,gu/v^2$ है, जहाँ p पर कण का वेग v है, तथा v का क्षैतिज अवयव u है।

11. एक मीनार पर से भूमि पर रखी किसी वस्तु का क्षितिज के नीचे अवनति ϕ कोण पाया गया। प्रक्षेप कोण α से एक तोप दागी गई, पर गोली इस वस्तु से हटकर भूमि पर एक दूसरे बिन्दु पर लगी, जिसका अवनति कोण ψ था। सिद्ध करो कि तोप का उपयुक्त प्रक्षेप कोण θ निम्न से प्राप्त होगा—

$$\frac{\cos \theta \sin (\theta+\phi)}{\cos \alpha \sin (\alpha+\phi)}=\frac{\cos^2 \phi \sin \psi}{\cos^2 \psi \sin \phi}$$

12. यदि किसी कण की परवलीय गति के दो क्षणों पर गति की दिशायें क्षितिज से क्रमशः α एवं β कोण बनाती हों, तो सिद्ध करो कि उन क्षणों के बीच $u(\tan \alpha-\tan \beta)/g$ का समय अन्तराल होगा; जहाँ u प्रक्षेप वेग का क्षैतिज वियोजित अवयव है।

5.2 किसी दिए हुए बिन्दु से होकर जाने वाला प्रक्षेपण

(a) (i) सिद्ध करो कि सामान्यतः प्रक्षेपण की दो दिशायें होती हैं, जिनमें बिन्दु 0 से किसी नियत वेग से प्रक्षेपण करने से प्रक्षेप्य किसी अन्य नियत बिन्दु A से होकर जाये।

(ii) यदि 0 को मूल बिन्दु मानकर A के निर्देशांक (a, b) हों, तो वह न्यूनतम प्रक्षेप वेग ज्ञात करो जिससे 0 से प्रक्षेप करने पर प्रक्षेप्य A से निकले।

हल :

(i) मान लो एक कण बिन्दु O से इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि प्रक्षेप्य किसी निश्चित बिन्दु A से होकर जाये। यदि O को मूल बिन्दु व O से गुजरने वाली क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर रेखाओं को नियामक अक्ष मानने पर A के निर्देशांक (a, b) हों, तब ये निर्देशांक प्रक्षेप्य के निम्न समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे

$$y=x \tan \alpha-\tfrac{1}{2} \frac{gx^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

अर्थात्

$$b=a \tan \alpha-\tfrac{1}{2} \frac{ga^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

या

$$b=a \tan \alpha-\tfrac{1}{2} \frac{ga^2}{u^2} (1+\tan^2 \alpha)$$

अर्थात

$$\tan^2 \alpha-\frac{2u^2}{ga} \tan \alpha+1+{}_2\frac{2\,u^2b}{ga}=0$$

चूंकि उपरोक्त समीकरण (1) $\tan \alpha$ में द्विघाती है, इससे निष्कर्ष निकलता है कि सामान्यत: प्रक्षेपण की दो दिशायें होती हैं, जिनमें बिन्दु O से किसी नियत वेग से प्रक्षेपण करने से प्रक्षेप्य किसी अन्य नियत बिन्दु A से होकर जाये।

(ii) (1) के मूल वास्तविक हों, इसका प्रतिबन्ध होगा

$$\frac{4u4}{g^2a^2} \geqslant 4 \left[1+\frac{2\,u^2b}{ga^2} \right]$$

अर्थात्

$$u^4 \geqslant [g^2a^2+2u^2\,gb]$$

या

$$(u^2-gb)^2 \geqslant g^2a^2+b^2)$$

या

$$u^2 \geqslant g(b+\sqrt{(a^2+b^2)})$$

अत: वह न्यूनतम वेग जिससे O से प्रक्षेप करने पर प्रक्षेप्य A निकले, निम्न से दिया जायेगा—

$$U_0{}^2=g(b+\sqrt{(a^2+b^2)})$$

बिन्दु O से कोई कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि वह किसी अन्य नियत बिन्दु A से होकर जाये। सिद्ध करो कि O से A तक दो भिन्न प्रक्षेप्यों से जाने में लगे समयों का गुणनफल प्रक्षेप वेग से स्वतन्त्र रहेगा, तथा उस समय के वर्ग के बराबर होगा, जो किसी कण को विराम से ऊर्ध्वाधर दिशा में स्वतन्त्र रूप से दूरी OA गिरने में लगेगा।

मान लो A के निर्देशांक (a, b) हैं, तथा कण को O से A तक जाने में समय t लगा है, तब

$$a = u \cos \alpha \,.\, t$$

$$b = u \sin \alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

उपरोक्त दो समीकरणों से α का विलोपन करने पर हमें प्राप्त होगा—

$$(b + \tfrac{1}{2} g t^2)^2 + a^2 = u^2 t^2$$

या

$$b^2 + bgt^2 + \tfrac{1}{4} g^2 t^4 + a^2 = u^2 t^2$$

अर्थात्

$$t^4 + \frac{4}{g^2}(bg - u^2)\, t^2 + 4\,\frac{(a^2+b^2)}{g^2} = 0$$

यदि t_1^2, t_2^2 इस समीकरण के मूल हैं, तब

$$t_1^2 \,.\, t_2^2 = \frac{4(a^2+b^2)}{g^2} = \frac{4r^2}{g^2}$$

जहाँ $r = OA$

अतः

$$t_1 \,.\, t_2 = \frac{2r}{g}$$

अतः

$$r = \frac{g}{2} t_1 \, t_2 \qquad \text{(i)}$$

अब कण को यदि विराम से ऊर्ध्वाधर दिशा में स्वतन्त्र रूप से r दूरी गिरने में T समय लगे, तब

$$r = \tfrac{1}{2} g \,.\, T^2 \qquad \text{(ii)}$$

अतः (i) एवं (ii) से

$$t_1 \, t_2 = T^2$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण :

बिन्दु A से किसी नियत वेग से प्रक्षेपण करने से प्रक्षेप्य किसी अन्य नियत बिन्दु B से होकर जाता है। यदि भिन्न प्रक्षेप्यों में A से B तक पहुंचने के समय t_1, t_2 हों, तथा AB की क्षैतिज से आनति θ हो, तो सिद्ध करो कि

$$t_1^2+2\,t_1t_2\sin\theta+t_2^2$$

θ से स्वतन्त्र रहेगा।

हल

पिछले अनुच्छेद से हमें ज्ञात है कि A को मूल बिन्दु मानकर यदि B के निर्देशांक (a, b) हैं, तब A से B तक के समय t_1, t_2 निम्न समीकरण से दिये जायेंगे—

$$t^4+\frac{4}{g^2}(bg-u^2)\,t^2+\frac{4}{g^2}(a^2+b^2)=0$$

यदि t_1^2 एवं t_2^2 इसके मूल हैं, तब

$$t_1^2,+t_2^2=-\frac{4}{g^2}(bg-u^2)$$

तथा

$$t_1^2,\ t_2^2=\frac{4}{g^2}(a^2+b^2)$$

अतः

$$t_1\,t_2=\frac{2}{g}\sqrt{(a^2+b^2)}$$

चूंकि AB रेखा की आनति θ है, अतः

$$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

तब

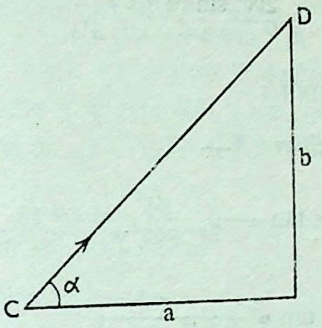
$$t_1^2+t_2^2+2\,t_1\,t_2\sin\theta$$

$$=-4\frac{b}{g}+\frac{4u^2}{g^2}+2\,.\,\frac{2}{g}\sqrt{(a^2+b^2)}\,.\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$=4\frac{u^2}{g^2}$$

जो कि θ से स्वतन्त्र है।

(2) C एवं D बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा क्षितिज से α कोण बनाती है। सिद्ध करो कि C से O के प्रक्षेपण का न्यूनतम वेग, D से C के प्रक्षेपण के प्रक्षेपण के न्यूनतम वेग का $\tan(\pi/4+\alpha/2)$ गुना है।



मान लो C को मूलबिन्दु मानने पर D के निर्देशांक (a, b) हैं, तब हमें दिया गया है कि $b/a=\tan\alpha$ यदि U_0 वह न्यूनतम वेग है, जिससे C से प्रक्षेपण करने पर कण D से होकर जायेगा, तब हमें ज्ञात होगा कि

$$U_0{}^2=g(b+\sqrt{(a^2+b^2)}$$

इसी प्रकार D को मूल बिन्दु मानने पर C के निर्देशांक होंगे $(-b, a)$ अतः यदि U_1 वह न्यूनतम वेग है जिससे D से प्रक्षेप करने पर कण C के होकर जायेगा, तब

$$u_1{}^2=g(-b+\sqrt{(a^2+b^2)}$$

अतः हमें प्राप्त होगा—

$$\frac{U_0{}^2}{U_1{}^2}=\frac{g(a+\sqrt{(a^2+b^2)})}{g(b+\sqrt{(a^2+b^2)})}=\frac{1+\operatorname{cosec}\alpha}{-1+\operatorname{cosec}\alpha}$$

क्योंकि

$$\frac{a}{b}=\cot\alpha$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha/2+\sin\alpha/2)^2}{(\cos\sigma/2-\sin\alpha/2)^2}$$

अत :

$$\frac{U^0}{U_1}=\frac{1+\tan\alpha/1}{2-\tan\alpha/2}=\tan(\pi/4+\alpha/2)$$

(3) किसी उर्ध्वाधिर तल में एक ही बिन्दु से एक साथ दो कण v एवं v^1 वेग से क्षैतिज से क्रमशः α एवं α^1 कोण पर प्रक्षिप्त किये जाते हैं। सिद्ध करो कि अपने पथों के दूसरे सार्व बिन्दु (common point) से होकर कण

$$\frac{2vv' \sin(\alpha-\alpha')}{g(V\cos a+v'\cos \alpha^1)}$$

समय के अन्तर पर जायेंगे।

प्रक्षेप पथों के समीकरण हैं—

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v'\cos^2\alpha} \tag{1}$$

एवं

$$y=x\tan\alpha'-\frac{gx^2}{2v'^2\cos^2\alpha^1} \tag{2}$$

अतएव दूसरे सार्व बिन्दु का x-निर्देशांक ज्ञात करने के लिये हम (1) और (2) से y का विलोपन करेंगे, अतः $\tan\alpha-\tan\alpha^1$

$$=g\ \frac{x}{2}\left(\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}\ \frac{1}{v'^2\cos^2\alpha^1}\right)$$

$$=g\ \frac{x}{2}\left(\frac{1}{v\cos\alpha}+\frac{1}{v'\cos\alpha^1}\right)\left(\frac{1}{v\cos\alpha}-\frac{1}{v^1\cos\alpha'}\right) \tag{3}$$

यदि सार्व बिन्दु तक पहुँचने के समय t_1 एवं t_2 हैं, तब

$$X=t_1V\cos\alpha=t_2v'\cos\alpha^1$$

अतः

$$t=t_1-t_2=x\left(\frac{1}{v\cos\alpha}\ \frac{1}{v'\cos\alpha'}\right) \tag{4}$$

अतः (3) को (4) से भाग देने पर

$$\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{t}=\frac{g}{2}\left(\frac{1}{v\cos\alpha}+\frac{1}{v'\cos\alpha'}\right)=\frac{g}{2}\ \frac{v\cos\alpha+v'\cos\alpha'}{VV'\cos\alpha\cos\alpha'}$$

$$\therefore\quad t=\frac{2}{g}\ \frac{VV'\sin(\alpha-\alpha)}{(v'\cos\alpha'+V\cos\alpha)}$$

प्रश्नावली 34

1. h डेसी० मी० ऊँची पहाड़ी पर शत्रु का कोणीय उत्थान (angular elevation) β है, दर्शाओ कि उस पर गोली मारने के लिये गोले का आदि वेग $\sqrt{(gh(1+\operatorname{cosec}\beta))}$ से कम नहीं होना चाहिये ।

2. दो कण एक ही बिन्दु से एक साथ एक ही ऊर्ध्वाधर समतल में प्रक्षिप्त किये जाते हैं । यदि उनके प्रक्षेप वेग u, v तथा प्रक्षेप कोण क्रमशः α, β हों तो सिद्ध करो कि उनके वेगों की दिशाएँ

$$\frac{uv \sin(\alpha-\beta)}{g(v\cos\beta-u\cos\alpha)}$$

समय बाद समान्तर होंगी ।

3. यदि h ऊँचाई से प्रक्षिप्त कण प्रक्षेपण बिन्दु से d दूरी पर गिरे, तो सिद्ध करो कि प्रक्षेपण का न्यूनतम वेग होगा $\sqrt{\{g(d-h)\}}$

4. सिद्ध करो कि जो प्रक्षेप पथ दो नियत बिन्दुओं से होकर जाते हैं, उनकी नाभियों का बिन्दुपथ एक अतिपरवलय होगा ।

5. एक ही बिंदु से विभिन्न दिशाओं में कण इस प्रकार प्रक्षिप्त जाते हैं कि वे h ऊँचाई की एक दीवार को स्पर्श करते हुये पार करें, तथा दीवार के समानान्तर एक पतली खाई में गिरें सिद्ध करो कि सभी कण एक ही समय पर खाई में गिरेंगे ।

6. एक कण क्षैतिज से α की आनति पर प्रक्षेप किया गया । यदि वह बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाये, तो सिद्ध करो

$$\tan\alpha=\frac{y_1}{x_1}\ \frac{R}{R-x_1}$$ जहाँ R परास है ।

यदि कण बिंदु (x_2, y_2) से भी होकर जाये, तो सिद्ध करो कि

$$\tan\alpha=\frac{x_2^2 y_1-x_1^2 y_2}{x_1x_2(x_2-x_1)}$$

7. दो कण एक उध्वधिर समतल में एक ही बिन्दु से और एक ही वेग u से,

क्षितिज से θ_1 एवं θ_2 कोण बनाते हुए प्रक्षेप किये जाते हैं। सिद्ध करो कि

$$\frac{u}{g}\frac{\cos 1/2\,(\theta_1-\theta_2)}{\sin 1/2\,(\theta_1+\theta_2)}$$

समय के पश्चात दोनों कणों की गति की दिशाएँ समान्तर होंगी।

8. दर्शाओ कि v वेग से प्रक्षेप करने पर प्रक्षेप बिंदु से a दूरी पर स्थित दीवार पर महत्तम ऊँचाई

$$\frac{v^2}{2g}-\frac{a^2g}{2v^2}$$

तक ही कण पहुँच सकेगा।

9. किसी बिन्दु O से एक ऊर्ध्वाधर तल में $\sqrt{(2gk)}$ वेग से कण प्रक्षिप्त किये जाते हैं। उनके पथों के शीर्षों का बिन्दु पथ ज्ञात करो।

10. किसी ऊर्ध्वाधर तल में एक ही बिंदु से समान वेगों से दो कण प्रक्षिप्त किये जाते हैं। यदि अपने पथों के दूसरे सार्व बिन्दु तक पहुँचने में इन्हें समय t, t' लगे, तथा अपने उच्चतम बिंदु तक पहुँचने में समय T,T' लगे, जो कि उच्चतम बिन्दु तक पहुंचने के समय हो, तो सिद्ध करो कि $tT+t'T'$ प्रक्षेप कोण से स्वतंत्र हैं।

11. दो बिंदुओं A एवं B के बीच की दूरी a है, भूमि से उनकी ऊंचाइयाँ क्रमशः h_1 एवं h_2 है। दर्शाओ कि वह न्यूनतम वेग जिससे भूमि से प्रक्षेप करने पर कण दोनों बिन्दुओं से होकर जाये, होगा

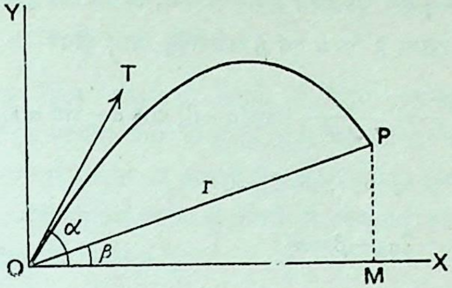
$$\sqrt{(g(h_1+{}_2+a))}$$

5.3 आनत तल पर परास (Range on an inclined plane)

β आनति वाले समतल के किसी बिन्दु O से एक कण ऊर्ध्वाधर तल में महत्तम ढाल रेखा के अनु प्रक्षिप्त किया गया है। मान लो कण का प्रक्षेप वेग u है एवं प्रक्षेप कोण α है। मान लो OP महत्तम ढाल रेखा है व कण P पर तल से टकराता है, अतः नत तल पर परास OP है।

कण के पथ का समीकरण है :

$$y=x \tan \alpha-\tfrac{1}{2}\frac{g\times 2}{us^2a^2c\ o}$$



मान लो $OP=r$, अतः P के निर्देशांक हैं $(r \cos \beta, r \sin \beta)$

अतः

$$r \sin \beta=r \cos \beta \tan \alpha-\tfrac{1}{2}\frac{gr^2 \cos^2 \beta}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

अर्थात

$$r\frac{g \cos^2 \beta}{2u^2 \cos^2 \alpha}=\cos \beta \tan \alpha-\sin \beta=\frac{\sin (\alpha-\beta)}{\cos \alpha}$$

$$\therefore \qquad r=\frac{2u^2}{g}\ \frac{\cos \alpha \sin (\alpha-\beta)}{\cos^2 \beta}$$

उडड्यन काल, T, यदि कण T समय पश्चात् तल ने P पर टकराता है, तब

$$r \cos \beta=OM=u \cos \alpha.T$$

चूंकि क्षैतिज दिशा में वेग का अवयव अचर $u \cos \alpha$, है ।

$$\therefore \quad T=\frac{r \cos \beta}{u \cos \alpha}\ \frac{2u \sin (\alpha-\beta)}{g \cos \beta'}$$

5.31 महत्तम परास

हमने पिछले अनुच्छेद में प्राप्त किया है कि u वेग से α प्रक्षेप कोण पर आनत तल पर परास—

$$r=\frac{2u^2}{g \cos^2 \beta}\{\cos \alpha.\sin(\alpha-\beta)\}$$

उसी प्रक्षेप वेग से भिन्न भिन्न प्रक्षेप कोणों पर प्रक्षेप करने पर परास भिन्न भिन्न होगी । हम महत्तम परास व उसके संगत कोण am ज्ञात करना चाहते हैं । अतः r को α के सापेक्ष अवकलन करने पर तथा $dr/d\alpha$ को शून्य के बराबर करने पर (यह ध्यान रखना है कि u एवं β अचर है), प्राप्त होगा—

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{2u^2}{g\cos^2\beta}\{\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\}=0$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha-\beta)=0$$

या

$$2\alpha_m-\beta=\pi/1 \qquad (1)$$

अत:

$$\alpha_m=\beta/2+\pi/4$$

अतः $\beta/2+\pi/4$ के प्रक्षेप कोण पर β आनति वाले तल पर परास महत्तम होगी । बिना अवकलन का उपयोग करके भी हम α_m मान ज्ञात कर सकते हैं । चूंकि

$$r=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}\{2\cos\alpha.\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}\{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta\}$$

अतः महत्तम परास

$$r_m=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}\{1-\sin\beta\},$$

चूंकि $\sin(2\alpha-\beta)$ का महत्तम मान 1 है ।

$\therefore$

$$\gamma_m=\frac{r}{g(1+\sin\beta)}$$

जब $\beta=0$, अर्थात् क्षैतिज तल पर महत्तम परास u^2/g होती है, तथा संगत प्रक्षेप कोण $\pi/4$ होता है ।

(i) को इस रूप में लिखने पर $(\alpha_m-\beta)=\pi/2-\alpha_m$ यह स्पष्ट है कि महत्तम परास प्राप्त करने के लिये, प्रक्षेपण की दिशा को नत तल एवं ऊर्ध्वाधर के बीच के कोण की अर्द्धक होना चाहिये ।

(ii) यदि OT प्रक्षेप की दिशा है, जब परास महत्तम है, OT पथ की O बिंदु पर स्पर्शी है, तथा O से होकर जाने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा नियता पर लम्ब है ।

अतः पथ की नाभि रेखा OP पर होना चाहिये (क्योंकि यह परवलय का गुण-धर्म है कि किसी बिंदु पर स्पर्शी की दिशा उस बिंदु से नियता पर डाले गये लंब एवं नाभीय जीवा के बीच के कोण की अर्द्धक होती है) अतः महत्तम परास की स्थिति में नाभि परास में स्थित होती है।

(iii) अतः महत्तम परास की स्थिति में परास OP एक नाभीय जीवा है। हमें ज्ञात है कि नाभीय जीवा के दोनों छोरों पर खींची गई स्पर्शियां एक दूसरे को लम्ब रूप से नियता पर काटती हैं। अतः P पर स्पर्शी प्रक्षेप वेग के लम्ब रूप है। अर्थात महत्तम परास की स्थिति में कण नत तल से प्रक्षेप वेग की लम्ब रूप दिशा में टकराता है।

(iv) अब हम यह दर्शाते हैं कि दिये हुए प्रक्षेप वेग एवं दी हुई नत परास के लिये दो प्रक्षेप दिशायें होंगी।

चूंकि

$$r=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}\{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta\}$$

अतः यदि u एवं परास r दिये हुए हैं, तब $\sin(2\alpha-\beta)$ भी ज्ञात है, इससे α के दो मान प्राप्त होंगे, मान लो α_1 एवं α_2

तब

$$\sin(2\alpha_1-\beta)=\sin(2\alpha_2-\beta)$$

अतः

$$2\alpha_1-\beta=\pi-(2\alpha_2-\beta)$$

या

$$\alpha_1-(\beta/2+\pi/4)=(\beta/2-\pi/4)-\alpha_2$$

अर्थात

$$\alpha_1-\alpha_m=\alpha_m-\alpha_2$$

जहाँ α_m महत्तम परास का प्रक्षेप कोण है। अतः दी हुई परास के लिये दो प्रक्षेप दिशाएं होती हैं, तथा ये दोनों महत्तम परास की संगत प्रक्षेप दिशा से बराबर के कोण पर झुकी रहती हैं।

5.32 नत समतल से टकराते समय वेग की दिशा

मान लो टकराते समय P पर वेग क्षैतिज से θ कोण बनाता है, तब

$$\tan\theta=\frac{u\sin\alpha-g.T}{u\cos\alpha}\text{ जहाँ }\quad T=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g(\cos\beta)}$$

$$=\tan\alpha-2\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$=\tan\alpha-2(\tan\alpha-\tan\beta)$$

$$=2\tan\beta-\tan\alpha$$

अतः कण क्षैतिज दिशा में आघात करेगा यदि $\tan\alpha=2\tan\beta$ नत समतल पर लम्ब दिशा में आघात का प्रतिबन्ध।

इस स्थिति में $\theta=(\pi/2-\beta)$, क्योंकि गति की दिशा नीचे की ओर देशित है, तथा क्षितिज से कोण $(\pi/2-\beta)$ बनाती है। अतः प्रतिबन्ध होगा

$$\tan(\beta-\pi/2)=2\tan\beta-\tan\alpha$$

या

$$\cot\beta=\tan\alpha-2\tan\beta$$

दोनों तरफ $\tan\alpha$ को जोड़ने पर

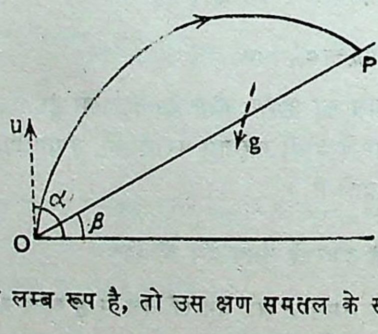
$$\tan\alpha+\cot\beta=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta}=2(\tan\alpha-\tan\beta)$$

या

$$\cot\beta=2\tan(\alpha-\beta)$$

विकल्प विधि :

नत समतल के अनु प्रक्षेप वेग u का अवयव है $(u\cos(\alpha-\beta)$ एवं त्वरण g का अवयव है $-g\sin\beta$; समतल पर कण के आघात करने के क्षण यदि गति



की दिशा समतल के लम्ब रूप है, तो उस क्षण समतल के समांतर कण का वेग शून्य होगा। अतः

$$u\cos(\alpha-\beta)-g\sin\beta.T=0$$

$$\therefore \qquad \frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta}=T=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$\therefore \qquad \cot\beta=2\tan(\alpha-\beta)$$

उदाहरण :

(1) सिद्ध करो कि किसी प्रक्षेप-बिन्दु से जाने वाले नत समतल पर महत्तम परास उसी दूरी के तुल्य होता है जितनी दूरी कि प्रक्षेप्य अपने इस संगत उडड्यन काल में गुरुत्वीय प्रभाव में स्वतंत्रता से गिर सकता है।

मान लो नत समतल क्षैतिज से β कोण बनाता है, तथा α प्रक्षेप कोण है। महत्तम परास के लिये हमें ज्ञात है

$$2\alpha-\beta=\pi/2$$

या

$$\alpha=\pi/4+\beta/2$$

अतः संगत उडड्यन काल,

$$T=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\ \ \frac{2u\sin}{g\cos\beta}\left(\frac{\pi}{4}-\beta/2\right)$$

इस समय में स्वतंत्रापूर्वक गिरते कण द्वारा ऊर्ध्वाधर विस्थापन

$$=\tfrac{1}{2}gT^2=\tfrac{1}{2}g\frac{4u^2\sin^2(\pi/4-\beta/2)}{g^2\cos^2\beta}$$

$$=\frac{u^2}{g}\left\{\frac{1-\cos(\pi/2-\beta)}{\cos^2\beta}\right\}=\frac{u^2}{g}\ \frac{(1-\sin\beta)}{1-\sin^2\beta}$$

$$=\frac{u^2}{g}\ \frac{1}{(1+\sin\beta)},$$

जो कि महत्तम परास है।

(2) एक कण को u वेग से प्रक्षिप्त करने पर, वह प्रक्षेप बिन्दु से जाने वाले तथा क्षैतिज से β कोण पर नत समतल पर लम्बवत् टकराता है। सिद्ध करो कि नत तल पर कण की परास होगी

$$\frac{2u^2}{g}\ \frac{\sin\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

यदि कण का क्षैतिज से प्रक्षेप कोण α है, तब हमें ज्ञात है कि वह तल पर लम्बवत आघात करे इसका प्रतिबन्ध है

$$\tan(\alpha-\beta)=\tfrac{1}{2}\cot\beta$$

या

$$\tan\alpha=\cot\beta+2\tan\beta$$

अतः

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\beta}{2\sin\beta}$$

या

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}=\frac{1}{\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}$$

पुनः

$$\tan a=2\tan\beta+\cot\beta$$

या

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

अर्थात

$$\frac{\sin\alpha}{1+\sin^2\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}=\frac{1}{\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta}{\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}$$

अतः परास

$$=2\frac{u^2}{g}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$$

$$=2\frac{u^2}{g}\,\frac{\sin\beta}{\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}\,\frac{1}{\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}$$

$$=2\frac{u^2}{g}\,\frac{\sin\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

(3) किसी बिन्दु O से प्रक्षेपण कोण α से कोई कण प्रक्षिप्त किया गया है। सिद्ध करो कि कण के पथ पर दो स्थितियाँ P ऐसी होंगी, जहाँ पर वेग की दिशा OP के लम्ब रूप होगी। सिद्ध करो कि ऐसी वास्तविक स्थितियों के अस्तित्व के लिये α का $\cos^{-1}(1/3)$ से कम नहीं होना आवश्यक है। यह भी दर्शाओ कि यदि P की दो स्थितियों में OP क्षितिज से कोण θ_1, θ_2 बनाती है, तो

$$\theta_1+\theta_2=\alpha$$

यह स्थिति वही है, जैसे कि एक β कोण की आनति वाले नत समतल पर कण का लम्बरूप आघात करना, जिसके लिये प्रतिबन्ध है

$$\cot \beta = \tan \alpha - 2 \tan \beta$$

या

$$2 \tan^2 \beta - \tan \alpha \tan \beta + 1 = 0 \qquad (1)$$

जो कि $\tan \beta$ में द्विघाती है, अतः P की दो स्थितियों में वेग की दिशा OP के लम्बरूप होगी । उपरोक्त समीकरण (1) के मूल वास्तविक हों, इसका प्रतिबन्ध होगा—

$$\tan^2 \alpha - 8 \geqslant 0$$

या

$$\tan^2 \alpha \geqslant 8$$

अर्थात

$$\sec^2 \alpha \geqslant 9$$

व्युत्क्रम लेने पर

$$\cos^2 \alpha \leqslant 1/9$$

या

$$\cos \alpha \leqslant 1/3$$

अर्थात

$$\alpha < \cos^{-1} (1/3)$$

अब यदि (1) को संतुष्ट करने वाले दो मान θ_1 एवं θ_2 हैं,

तब

$$\tan \theta_1 + \tan \theta_2 = \tfrac{1}{2} \tan \alpha$$

एवं

$$\tan \theta_1 . \tan \theta_2 = \tfrac{1}{2}$$

अत:

$$\tan (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \tan \alpha}{1 - \frac{1}{2}} = \tan \alpha$$

अतः

$$\theta_1 + \theta_2 = \alpha$$

प्रश्नावली 35

1. किसी वेग से प्रक्षिप्त हुए कण का क्षैतिज समतल पर महत्तम परास 5000 मीटर है, उसका महत्तम परास उस नत समतल पर ज्ञात करो जिसका झुकाव 45° है,

(i) जब कण समतल पर ऊपर की ओर प्रक्षिप्त किया जाये एवं

(ii) जब उसे नत तल पर नीचे की ओर प्रक्षिप्त किया जाये ।

2. सिद्ध करो कि किसी दिये हुये प्रक्षेप वेग के लिये, α आनति वाले नत तल पर तल से नीचे की ओर का महत्तम परास एवं तल से ऊपर की ओर के महत्तम परास का अनुपात होगा

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

3. दो कण एक साथ प्रक्षिप्त किये जाते हैं। एक तो क्षितिज से $30°$ के कोण से नत चिकने समतल पर V वेग से ऊपर की ओर; तथा दूसरा $2V/\sqrt{3}$ वेग से $60°$ के उन्नतांश कोण पर; दर्शाओ कि प्रक्षेप क्षण से $2V/3g$ सेकन्ड पश्चात् वे कण सापेक्षतया विरामावस्था (relatively at rest) में होंगे ।

4. एक कण को u वेग से प्रक्षिप्त करने पर, वह प्रक्षेप बिन्दु से जाने वाले तथा क्षैतिज से β कोण पर नत समतल पर लम्बवत टकराता है। सिद्ध करो कि (i) उसका उड्डयन काल है

$$\frac{2u}{g\sqrt{(1+3\sin^2\beta)}}$$

एवं (ii) क्षैतिज तल से आघात बिन्दु की ऊंचाई है

$$\frac{2u^2}{g}\,\frac{\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

5. क्षितिज के α आनित वाले नत तल के एक बिन्दु से एक कण u वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि तल पर ऊपर की ओर महत्तम परास r हो, तथा तल पर नीचे की ओर महत्तम परास r' हो तो, सिद्ध करो $1/r+1)/r'$ तल के झुकाव α से स्वतन्त्र है ।

6. किसी नत समतल के किसी बिन्दु से दो कण एक ही वेग से एक ही ऊर्ध्वाधर समतल में एक दूसरे से समकोण पर प्रक्षिप्त होते हैं । दर्शाओ कि उनके परासों का अन्तर अचर है ।

5.4 पथों के अन्वालोप (Envelope of the paths)

कोई कण जब u वेग से क्षैतिज कोण a की आनति पर प्रक्षिप्त किया जाता है, तब उसके पथ का समीकरण है

$$y=x \tan a-\frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 a} \tag{1}$$

a के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होगा

$$0=X \sec^2 a-\frac{gx^2}{u^2} \sec^2 a \,.\, \tan a$$

या

$$\tan a=\frac{u^2}{gx}$$

$\tan a$ के इस मान को मूल समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होगा

$$y=\frac{u^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2}\left(1+\frac{u^4}{g^2x^2}\right)$$

$$=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}$$

या

$$x^2=-\frac{2u^2}{g}\left(y-\frac{u^2}{2g}\right)$$

अर्थात्

$$X^2=-4h(y-h),$$

जहां

$$h=\frac{u^2}{2g} \quad \text{है ।}$$

अतः h वह ऊंचाई है, जितना कण u वेग से ऊर्ध्वारतः ऊपर की ओर प्रक्षेप करने पर उठेगा। यह समीकरण एक परवलय का द्योतक है, जिसकी नाभि प्रक्षेप बिन्दु है, नाभि लम्ब

$$=\frac{2u^2}{g}=4h,$$

शीर्ष है $(0, h)$ तथा सभी प्रक्षेप पथों की सार्व नियता इसके शीर्ष पर स्पर्शी है। क्योंकि यह अन्वालोप सब परवलयों को बाह्यतः स्पर्श करता है, इसलिये प्रक्षेप

बिन्दु गत किसी रेखा पर महत्तम परास इस रेखा का वह भाग होगा जो अन्वालोप द्वारा अन्तः खन्डित होगा। इस अन्वालोपी परवलय के बाहर के किसी बिन्दु पर प्रक्षेप कण कभी नहीं पहुंच सकेगा।

उदाहरण के लिये यदि β आनति के नत तल पर महत्तम परास R ज्ञात करना है, तो P के निर्देशांक होंगे

$$(R\cos\beta,\ R\sin\beta),$$

अतः अन्वालोपी परवलय

$$X^2=-4h(y-h),$$

जहाँ

$$h=\frac{u^2}{2g}$$

में P के ये निर्देशांक रखने पर

$$R^2\cos^2\beta=-4h(R\sin\beta-h)$$

या

$$R^2(1-\sin^2\beta)=-4hR\sin\beta+4h^2$$

अर्थात्

$$R^2=R^2\sin^2\beta-4hR\sin\beta+4h^2$$

$$=(R\sin\beta-2h)^2$$

$$\therefore \quad R\sin\beta-2h=\pm R$$

$$\therefore \quad R=\frac{2h}{(1+\sin\beta)}=\frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

उदाहरण

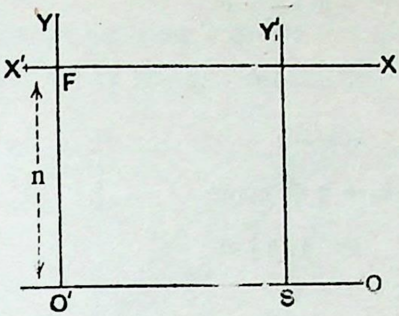
एक दुर्ग तथा एक जहाज में तोपे लगी हुई हैं जिनके मुख वेग $\sqrt{(2gk)}$ हैं, दुर्ग की तोपें की जहाज की तोपों से ऊंचाई h है। यदि किले और जहाज की तोपों की महत्तम क्षैतिज परासें क्रमशः d_1 एवं d_2 हैं तो सिद्ध करो

$$\frac{d_1}{d_2}=\sqrt{\left(\frac{(k+h)}{(k-h)}\right)}$$

मान लो F एवं S किले एवं जहाज की स्थितियां हैं। चूंकि

$$u^2=2gk$$

अतः S या F से होकर जाने वाले प्रक्षेप्यों के पथों की नियता की ऊंचाई K होगी। उस अन्वालोपी परवलय का समीकरण जिसकी नाभि S है और अक्ष SX एवं SY है, होगा



$$X^2 = -4k(y-k) \qquad \text{(i)}$$

परवलय (i) जहाँ क्षैतिज रेखा OO', अर्थात्

$$y = -h,$$

को काटेगा, उसका भुज ही OO' की दिशा में महत्तम परास देगा। अतः

$$x = d_1 = 2\sqrt{(k(k+h))} \qquad \text{(ii)}$$

अब S से होकर जाने वाले प्रक्षेप्यों का अन्वालोपी परवलय का समीकरण भी (i) से दिया जायेगा, किन्तु अब अक्ष होंगी SO एवं SY', यह अन्वालोपी FX' अर्थात् $y=h$, को जहाँ कटेगा, उसके भुज से ही क्षैतिज दिशा में महत्तम परास ज्ञात होगी। अतः

$$x = d_2 = 2\sqrt{(k(k-h))} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) एवं (iii) से

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\left(\frac{(k+h)}{(k-h)}\right)}$$

2. एक कण गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत $\sqrt{(2ga)}$ वेग से एक बिन्दु से, जिसकी समतल ऊंचाई h है, प्रक्षिप्त किया गया है। दर्शाओ कि समतल पर महत्तम परास प्राप्त करने के लिये प्रक्षेप कोण निम्न से दिया जायेगा

$$\tan^2\theta = \frac{a}{a+h}$$

अन्वालोपी परवलय है

$$X^2 = -4h(y-h)$$

जहाँ

$$= h = \frac{u^2}{2g} = a$$

अतः

$$x^2 = -4a(y-a)$$

एवं समतल है

$$y = -h$$

अतः महत्तम परास निम्न से दी जायेगी

$$x^2 = 4a(h+a)$$

अतः महत्तम परास,

$$R = 2\sqrt{(a(h+a))}$$

यदि प्रक्षेप कोण θ है, तब कण का परवलीय पथ है

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$$

इसमें

$$y = -h$$

एवं

$$x = 2\sqrt{(a(h+a))}$$

प्रतिस्थापित करने पर प्राप्य होगा

$$-h = 2\tan\theta \,.\, \sqrt{(a(h+a))} - \frac{1}{2}g\frac{4a(h+a)}{2ag}\,.\,(1+\tan^2\theta)$$

अर्थात्

$$(h+a)\tan^2\theta - 2\sqrt{(a(h+a))}\,.\,\tan\theta + a = 0$$

$$\{\sqrt{(h+a)}\tan\theta - \sqrt{a}\}^2 = 0$$

अतः

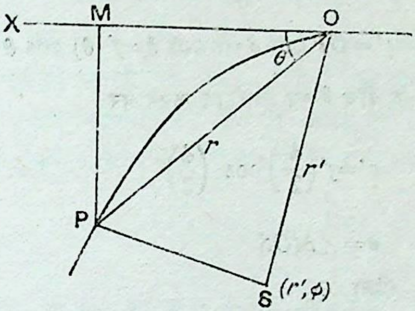
$$\tan\theta_m = \sqrt{\left(\frac{a}{h+a}\right)}$$

अर्थात् महत्तम परास के संगत प्रक्षेप कोण,

$$\theta_m = \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{a}{h+a}\right)}$$

विविध साधित उदाहरण

(1) एक ऊर्ध्वाधर समतल वक्र के उच्चतम बिन्दु से वक्र की जीवाओं पर कण नीचे को फिसलते हैं । यह बिन्दु मूल बिन्दु माना जाता है, तथा उससे होती



हुई एक क्षैतिज रेखा मूल रेखा मानी जाती है । यदि जीवाओं को छोड़ने के उपरान्त कण स्वतन्त्रापूर्वक गिरने दिये जायें तो सिद्ध करो कि उत्तरगामी पथों की नाभियों का बिन्दुपथ होगा

$$r=f\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2},$$

जहाँ वक्र का समीकरण है

$$r=f(\theta)$$

वक्र की जीवा OP को ले लें । विराम से OP के अनु P तक फिसलने पर वही वेग होगा जो OX से गिरने पर प्राप्त होगा । अतः उत्तरगामी परवलीय पथ की नियता OX होगी, क्योंकि P इस परवलय पर एक बिन्दु है और P पर वेग OX से गिरने पर उत्पन्न होगा । अतएव जीवायें छोड़ने के बाद सभी कणों के पथों की एक ही नियता OX होगी । इसके अतिरिक्त P पर वेग कि दिशा OP होगी, अतः OP P बिन्दु पर परवलय को स्पर्श करेगी और परिणामतः P से होकर जाने वाली नाभि जीवा तथा P से नियता पर लम्ब PM के मध्य के कोण को समद्विभाजित करेगी ।

अब P से एक सरल रेखा PS इस प्रकार खींचें कि

$$\angle OPS=\angle OPM$$

तथा PS को PM के बराबर लें। तब उत्तरगामी पथ की नाभि S है। त्रिभुज OPS एवं OPM पूर्णतया तुल्य हैं।

मान लो S के ध्रुवीय निर्देशांक (r, ϕ) हैं, तब

$$\phi = 2\,\theta \tag{1}$$

एवं

$$OS = r' = OP \cos\theta = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \tag{2}$$

अब (1) और (2) के बीच θ का विलोपन करने पर

$$r' = f\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

जहाँ

$$\phi = \angle MOS$$

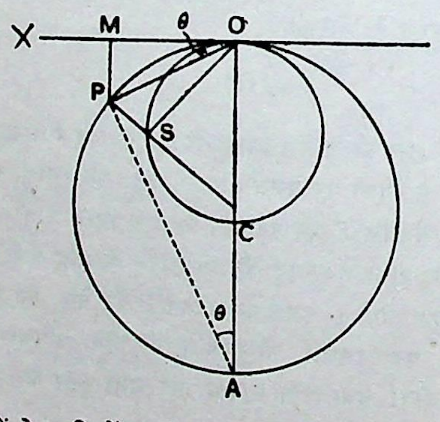
अतः S का बिन्दुपथ होगा

$$r = f\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

विशेष स्थिति

मान लो वक्र a त्रिज्या का ऊर्ध्व वृत्त है, तब उसका समीकरण है

$$r = 2a\sin\theta$$



अतः परवलीय पथों के नाभियों का बिन्दुपथ होगा

$$r = 2a\sin\frac{\theta}{2}\ \text{eos}\ \frac{\theta}{2}$$

$$=a \sin t\ \theta$$

यह एक वृत्त है जो कि दिये हुये वृत्त को 0 पर स्पर्श करता है, तथा OC इसका व्यास है, जबकि OC मूल वृत्त की त्रिज्या है।

एक कण गुरुत्व के अन्तर्गत किसी बिन्दु A से इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि वह एक नियत बिन्दु B से होकर जाये। दर्शाओ कि दिये हुये प्रक्षेप वेग के लिये ऐसे दो प्रक्षेप्य पथ होंगे। यदि A को मूल बिन्दु मानकर B के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर निर्देशांक x, y हों, एवं प्रक्षेप वेग $\sqrt{(2gh)}$ हो, तब सिद्ध करो कि B से होकर जाने वाले दोनों पथों के बीच का कोण समकोण होगा यदि B दीर्घवृत्त

$$X^2+2y^2=2hy$$

पर स्थित हो

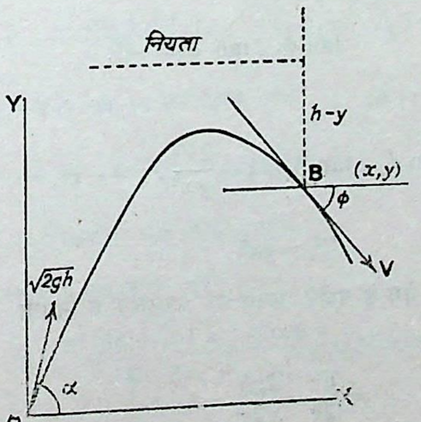
यदि मान लो कण को A से B तक पहुँचने में t समय लगा, यदि प्रक्षेप कोण α हो, तब

$$x=\sqrt{(2gh)} \cos \alpha \,.\, t \qquad \text{(i)}$$

$$y=\sqrt{(2gh)} \sin \alpha \,.\, t-\frac{1}{2} gt^2 \qquad \text{(ii)}$$

यदि B पर कण का वेग V है, तथा क्षैतिज से उसके झुकाव का कोण ϕ है, चित्रानुसार तब

$$V\cos \phi=u \cos \alpha$$



एवं

$$V \sin \phi=u \sin \alpha-g t$$

जहाँ

$$u=\sqrt{(2gh)}$$

उपरोक्त मानों को (i) एवं (ii) में रखने पर, प्राप्त होगा

$$X=V\cos\phi\ .\ t \qquad \text{(iii)}$$

एवं

$$y=\left(u\sin\alpha-\frac{1}{2}gt\right)t=(u\sin\alpha-gt)\ t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$=V\sin\phi\ .\ t+\frac{1}{2}\ gt^2 \qquad \text{(iv)}$$

(iii) से t का मान (iv) में रखने पर

$$y=x\tan\phi+\frac{gx^2}{2V^2}\ (1+\tan^2\phi)$$

या

$$\tan^2\phi+\frac{2V^2}{gx}\ \tan\phi+1\ \frac{2V^2}{gx^2}\ y=0 \qquad \text{(v)}$$

इससे $\tan\phi$ के दो मूल प्राप्त होंगे, अतः A से प्रक्षिप्त होकर कण B से होकर जाये, ऐसे दो पथ होंगे।

यदि $\tan\phi_1$ एवं $\tan\phi_2$ उपरोक्त समीकरण के मूल हैं, तब ये दोनों पथ परस्पर B पर लम्बवत् होंगे, यदि

$$\tan\phi_1\ .\ \tan\ \phi_2=-1.$$

किन्तु समीकरण (v) से,

$$\tan\phi_1\ .\ \tan\phi_2=1-\frac{2V^2}{gx^2}\ ,\ y=-1$$

अर्थात्

$$V^2y=gx^2 \qquad \text{(vi)}$$

हमे ज्ञात है कि u वेग से प्रक्षेप करने पर परवलय के नियता की ऊँचाई, प्रक्षेप बिन्दु से

$$=\frac{u^2}{2g}=\frac{2gh}{2g}=h$$

अतः

$$V^2=2g(h-y),$$

अतः (vi) से

$$2(h-y)y=x^2$$

या

$$x^2+2y^2=2hy$$

3. क्षैतिज तल से h ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु O से एक कण A ऊपर की ओर क्षैतिज से कोण α पर वेग से प्रक्षिप्त किया गया है। इसी बिन्दु से एक दूसरा कण B उसी वेग u से परन्तु पहले कण की ठीक विपरीत दिशा में प्रक्षिप्त किया गया। सिद्ध कीजिये कि दोनों कण की क्षैतिज तल पर एक दूसरे से होगी

$$\frac{2u}{g}\cos\alpha\ \sqrt{(u^2\sin^2\alpha+2h)}$$

प्रक्षेप बिन्दु को मूल बिन्दु तथा y अक्ष को उपरिमुखी लेने पर प्रथम कण के पथ का समीकरण होगा

$$y=x\tan\alpha-\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

इसमें भूतल पर $y=-h$ रखने पर

$$-h=x\tan\alpha-\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

जो कि X में द्विघाती समीकरण है, उसे हल करने पर

$$X_1=\frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}+\frac{u\cos\alpha}{g}\sqrt{(u^2\sin^2\alpha+2gh)}$$

इसी प्रकार दूसरे कण के पथ का समीकरण होगा

$$y=x\tan(\pi+\alpha)\tfrac{1}{2}g\frac{X^2}{u^2\cos^2(\pi+\alpha)}$$

$$=x\tan\alpha-\tfrac{1}{2}g\,x^2/u^2\cos^2\alpha$$

इसमें $y=-h$ रखकर, हल करने पर

$$X_2=\frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}-\frac{u\cos\alpha}{g}\sqrt{(u^2\sin^2\alpha+2gh)}$$

अतः अभीष्ट दूरी

$$=X_1-X_2$$

$$=\frac{2u}{g}\cos a\sqrt{(u^2 \sin^2 a+2gh)}$$

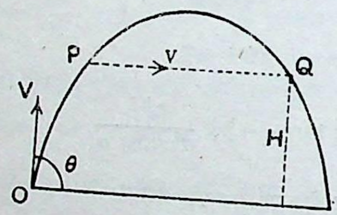
(4) एक बन्दूक से एक गोली V वेग से, क्षैतिज से θ आनति पर दागी गई, जो कि एक विमान को H ऊंचाई पर आघात करती है। विमान क्षैतिज दिशा में v वेग से बन्दूक से दूर जा रहा है। दर्शाओ कि यदि

$$(2V\cos\theta-v)(V^2\sin^2\theta-2gH)^{1/2}=v.V\sin\theta$$

हो, बंदूक को गोली विमान को तभी लगी होती यदि विमान उस स्थिति में स्थिर रहता जिस पर वह तब था, जब गोली दागी गई थी।

मान लो Q बिन्दु पर गोली विमान को आघात करती है, तब Q एवं P बिन्दुओं की प्रक्षेप बिन्दु O से ऊँचाई H होगी। O से Q तक पहुंचने में यदि t समय लगा है, तब वह निम्न समीकरण से प्राप्त किया जायेगा।

$$H=V\sin\theta.\ t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$



जो कि t में द्विघाती है, मान लो इसके मूल t_1 एवं t_2 हैं, जहाँ $t_1<t_2$ स्पष्ट है कि O से Q तक जाने में t_1 समय लगा, तथा Q तक जाने में t_2 समय लगा। समीकरण (1) से

$$t=\frac{1}{g}V\sin\theta\pm\frac{1}{g}\sqrt{(V^2\sin^2\theta-2gH)}$$

अत:

$$t_2=\frac{1}{g}V\sin\theta+\frac{1}{g}\sqrt{(V^2\sin^2\theta-2gH)}$$

तथा

$$t_1=\frac{1}{g}V\sin\theta-\frac{1}{g}\sqrt{(V^2\sin^2\theta-2gH)}$$

$$\therefore \quad t_2-t_1=\frac{2}{g}\sqrt{V^2\sin^2\theta-2gH}$$

जब गोली दागी गई, तब विमान P पर था; अगर वहीं स्थिर रहता, तो t_1 समय पश्चात गोली लगती, अतः गोली ने (t_2-t_1) समय में PQ क्षैतिज दूरी तय की, तथा विमान t_2 समय में PQ दूरी चला। अतः

$$PQ=(t_2-t_1)\ V\ \cos\theta=t_2.V$$

अर्थात

$$\frac{2}{g}\sqrt{(V^2\sin^2\theta-2gH)}.V\cos\theta$$

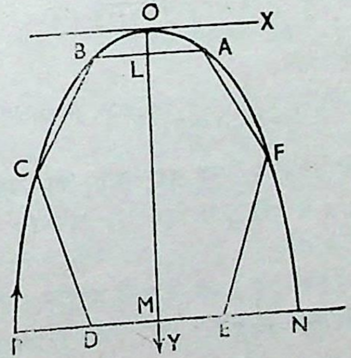
$$=\left(\frac{1}{g}V\sin\ \theta+\frac{1}{g}\sqrt{(V^2\ \sin^2\theta+2gH)}\right)$$

करणी वाले पदों को एक ही तरफ पक्षांतरित करने पर

$$(2\ V\cos\theta-v)\sqrt{(V^2\sin^2\theta-2gH}=v.V\sin\theta$$

(5) एक ऊर्ध्वाधर सम षड्भुज, जिसकी भुजा a है, अपनी एक भुजा पर किसी मेज पर रखा है। एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि वह ऊपरी चार शीर्षों को मात्र स्पर्श करता हुआ निकल जाये। सिद्ध करो कि मेज पर कण की परास $a\sqrt{7}$ है, तथा इसके उड्डयन काल का वर्ग है—$28a/g\sqrt{3}$

मान लो $ABCDEF$ एक समषड्भुज है, तथा कण के पथ का परवलय C, B, A, एवं F से होकर जाता है। परवलय का अक्ष BA एवं DE को समद्विभाजित करेगा, तथा यह स्पष्ट है कि बिन्दुओं के युग्म (A, B) एवं (F, C) की स्थिति परवलय के अक्ष के प्रति सममित होगी।



मान लो शीर्ष पर के स्पर्शी को X अक्ष मान लें, तथा परवलय की अक्ष के नीचे की ओर y अक्ष मान लें।

मान लो शीर्ष O की AB से ऊपर ऊंचाई h है।

मान लो परवलय का समीकरण $X^2=4dy$ है, जहां $4d$ उसका नाभिलम्ब है। तब A के निर्देशांक हैं $(a/2, h)$, तथा F के हैं $\{a, (h+a \sin \pi/3)\}$

इन निर्देशांकों को समीकरण $x^2=4dy$ में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होगा—

$$\frac{a^2}{4}=4dh \tag{1}$$

एवं

$$a^2=4d\left(h+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{2}$$

$$\therefore \qquad d=\frac{a\sqrt{3}}{8} \text{ एवं } h=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

अतः परवलय का समीकरण होगा

$$X^2=\frac{\sqrt{3}}{2}ay$$

अब

$$OM=h+a\sqrt{3}=\frac{a}{2\sqrt{3}}+a\sqrt{}=\frac{7a}{2\sqrt{3}}$$

चूंकि N बिंदु परवलय पर है, अतः समीकरण (3) से

$$MN^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\,OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a.\,\frac{7a}{2\sqrt{3}}\;\frac{7a^2}{4}$$

$\therefore$ क्षैतिज समतल पर परास,

$$PN=2MN=a\sqrt{7}$$

प्रक्षेपण विन्दु P से उच्चतम विन्दु तक जाने का समय वही होगा, जो विराम से ऊर्ध्वाधर दिशा में दूरी OM गिरने में लगेगा। अतएव यह समय t निम्न से दिया जायेगा—

$$OM=\frac{1}{2}gt^2$$

या

$$t^2=\frac{2OM}{g}=\frac{7a}{g\sqrt{3}}$$

अब उड्डयन काल उच्चतम बिन्दु तक जाने के समय का दुगना होगा, अतः

उड्डयन काल का वर्ग $=\frac{28a}{g\sqrt{3}}$

(6) किसी बिन्दु O से एक ही साथ कण विभिन्न दिशाओं में समान वेग v से प्रक्षिप्त किये जाते हैं। सिद्ध करो कि t सेकंड बाद ये एक गोले के धरातल पर स्थित होंगे, जिसकी त्रिज्या Vt होगी। यह भी सिद्ध करो कि इस गोले के केन्द्र की नीचे की ओर वेगवृद्धि g होगी।

यहां प्रक्षेप बिन्दु O के चारों ओर कण सभी दिशाओं में चलते हैं। आकाश में किसी एक कण की स्थिति ज्ञात करने के लिये O से गति की प्रारम्भिक दिशा में एक रेखा खींचे और उस पर दूरी Vt नाप लें। मान लो कि यह OP है। अब P से एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचकर उस पर $1/2\ gt^2$ के बराबर दूरी PQ काट लें। तब t समम पर कण की स्थिति Q पर है। क्योंकि, गुरुत्व के कारण वेगवृद्धि नहीं हुई होती, तो t समय में कण का स्थानान्तर Vt होता, तथा यदि O के ठीक नीचे $1/2gt^2$ दूरी पर बिन्दु R हो, तो कण का गुरुत्व के कारण विस्थापन $OR=1/2gt^2$ होता, यदि कोई प्रारम्भिक वेग नहीं होता। विस्थापनों के समानान्तर चतुर्भुज के नियम से हमें कण का लब्ध विस्थापन प्राप्त हो जाता है, तथा उसकी अंतिम स्थिति ज्ञात हो जाती है। अतएव t समय पर Q की R से दूरी Vt है। इसी प्रकार अन्य सभी कण, चाहे वे किसी दिशा में प्रक्षिप्त किये गये हों, t समय पर R से Vt दूरी पर होंगे। अतएव t समय पर वे सब उस गोले पर स्थित होंगे, जिसकी त्रिज्या Vt तथा केन्द्र R है। स्पष्ट है कि R की नीचे की ओर वेगवृद्धि g है।

विविध प्रश्नावली 34

1. यदि किसी ऊर्ध्वाधर वृत्त की जीवाओं पर चलकर कण उसके निम्नतम बिन्दु पर पहुंचे, तो सिद्ध करो कि कणों के उत्तरगामी पथों के नाभियों का बिन्दु पर एक हृदयाभ (cardioid) होगा।

2. एक कण क्षैतिज से α प्रक्षेप कोण पर प्रक्षिप्त किया जाता है, तथा t सेकण्ड पश्चात् प्रक्षेपण बिन्दु से देखने पर उसका उन्नतांश कोण (angle of elevation) β प्रतीत होता है। सिद्ध करो कि कण का प्रक्षेप वेग था

$$\frac{gt \cos \beta}{2 \sin (\alpha-\beta)}$$

3. एक ऊर्ध्वाधर वृत्त के व्यासों के अनुकण नीचे की ओर फिसलते हैं। सिद्ध करो कि उत्तरगामी परवलयों की नाभियों का बिन्दु पथ एक वृत्त होगा।

4. एक कण को $2\sqrt{(ag)}$ वेग से इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि वह उन दो दीवारों को स्पर्श करता हुआ पार करता है, जिनमें से प्रत्येक की प्रक्षेप बिन्दुगत क्षैतिज समतल से ऊंचाई a है, तथा जिनकी परस्पर दूरी $2a$ है। सिद्ध करो कि प्रक्षेप पथ की नाभि लम्ब जीवा $2a$ है, तथा एक दीवार से दूसरी तक जाने का समय $2\sqrt{(a/g)}$ है।

5. नत समतल के किसी बिन्दु से समतल से 45° के कोण पर प्रक्षिप्त एक कण समतल से लम्बवत आघार करता है। समतल की क्षैतिज से आनति ज्ञात करो।

6. एक कण की वेगवृद्धि स्थिर तथा सदैव एक ही दिशा में है। उसके पथ पर की तीन स्पर्शियां एक त्रिभुज ABC बनाती है ; AB, BC एवं CA के अनु वेग क्रमश: w, u एवं v हैं। सिद्ध करो कि

$$\frac{BC}{u}+\frac{CA}{v}+\frac{AB}{w}=0$$

7. किसी बिन्दु से किसी प्रक्षेप कोण पर एक गोली दागी जाती है। सिद्ध करो कि प्रक्षेपण बिन्दु से देखने पर गोली किसी ऊर्ध्वाधर लक्ष्य के पास से सम वेग द्वारा उतरती हुई प्रतीत होती है।

8. एक गाड़ी के अगले एवं पिछले पहियों की त्रिज्यायें क्रमशः a और b हैं, तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी c है। यदि धूल का एक कण पिछले पहिये के उच्चतम बिन्दु से छिटक कर अगले पहिये के उच्चतम बिन्दु पर जाकर गिरे, तो सिद्ध करो कि गाड़ी का वेग है।

$$\sqrt{\left\{\frac{c^2-(b-a)^2}{4(b-a)}\right\} g}$$

9. एक वायुयान स्थिर ऊंचाई h पर स्थिर वेग v से उड़ रहा है। जब वायुयान किसी तोप के ठीक ऊपर से होकर निकला हो, और तोप से देखने पर उसका उन्नतांश α हो, उस समय यदि वेग v से कोई गोला ठीक वायुयान की दिशा में दागा जाय, तो सिद्ध करो कि गोला वायुयान पर **तभी लग सकता है, जब**

$$2(V\cos\alpha - v)\, v\tan^2\alpha = gh$$

10. यदि किसी परवलीय पथ में किसी क्षण नियता से नीचे प्रक्षेप्य की दूरी y हो, तथा क्षैतिज वेग u हो, तो सिद्ध करो कि गति की दिशा परिवर्तन की दर होगी

$$u/2y$$

11. कणों को विरामावस्था से गुरुत्व के अन्तर्गत एक नियत बिन्दु से भिन्न रैखिक जीवाओं के अनु एक नियत ऊर्ध्वाधर रेखा तक फिसलने दिया जाता है। यदि इस रेखा को छोड़ने के उपरान्त ये कण परवलीय प्रक्षेप पथों में चलें, तो सिद्ध करो कि इन पथों की नाभियों का बिन्दु पथ एक वृत्त, तथा इनके शीर्षों का बिन्दु पथ एक दीर्घ वृत्त होगा।

12. एक ऊर्ध्वाधर सम षड्भुज अपनी एक भुजा पर भूमि पर खड़ा है। एक कण भूमि से इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि वह ऊपरी चार शीर्षों को स्पर्श करता हुआ निकल जाये। सिद्ध करो कि भूमि पर पहुंचने पर उसका वेग एवं उसका न्यूनतम वेग का अनुपात होगा :

$$\sqrt{31} : \sqrt{3}$$

13- एक तोप एक नत समतल पर रखी है। यदि समतल पर ऊपर और नीचे की दिशा में महत्त्व परास क्रमशः R_1 एवं R_2 हों और क्षैतिज समतल पर महत्तम परास R हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

14. एक ही प्रकार की दो तोपों की महत्तम क्षैतिज परास R है। एक तोप किसी दुर्ग के ऊपर लगी हुई है, जिसकी समुद्र तल से ऊँचाई h है, तथा दूसरी किसी जहाज पर। सिद्ध करो कि दुर्ग से अधिकतम दूरी जहाँ जहाज को गोला लग सकता है $R+h$ होगी, किन्तु वह -अधिकतम दूरी जहाँ से जहाज दुर्ग को गोला मार सकता है $R-h$ होगी।

अतएव, यदि प्रत्येक तोप के गोलों का प्रक्षेप वेग $\sqrt{2(gk)}$ हो तो सिद्ध करो कि $8\pi kh$ क्षेत्रफल का एक वलयाकार क्षेत्र (annular region) ऐसा होगा जिसमें दुर्ग तो जहाज की मार से बाहर होगा, किन्तु जहाज दुर्ग की तोप की मार से बाहर नहीं होगा।

15. त्रिज्ता γ की अर्धगोलाकार पहाड़ी की चोटी से एक गोली $\sqrt{((2gh))}$ वेग से मारी जाती है। सिद्ध करो कि महत्तम दूरी पर स्थित वे सब बिन्दु, जहाँ तक यह गोली पहुँच सकती है, प्रक्षेप बिन्दु से रेखीय दूरी $\gamma-\sqrt{((\gamma^2-4\gamma h))}$ पर स्थित होंगे।

16. यदि किसी आनत समतल पर महत्तम परास R हो, तथा इसके लिये समय T लगता हो, तो सिद्ध करो कि

$$R=1/2\,gT^2$$

17. एक कण u वेग से क्षितिज से α आनति पर प्रक्षिप्त किया जाता है। सिद्ध करो कि, यदि $h<\left(\frac{u^2\sin^2}{2g}\right)$, तो कण पहली बार h ऊंचाई पर होने के $2/g\sqrt{(u^2\sin^2\alpha-2gh)}$ समय बाद पुनः उसी ऊंचाई पर होगा।

18. एक तोप u प्रक्षेप वेग से गोला दागती है। सिद्ध करो कि h ऊंचाई पर उड़ते हुए किसी वायुमान की अधिकतम क्षैतिज दूरी, जिस पर गोला लग सकता है। $(u/g)\,(u^2-2gh)^{1/2}$ होगी। यह भी सिद्ध करो कि तब तोप का उन्नतांश होगा।

$$\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{(u^2-2g)}}$$

19. यदि प्रक्षेप बिन्दु से प्रक्षिप्त होने के T समय पश्चात् कण उस आनत तल पर आघात करे जो प्रक्षेप बिन्दु से होकर जाता है, तो सिद्ध करो कि t समय पर प्रक्षेप्य की नत समतल के ऊपर ऊर्ध्वाधर ऊंचाई होगी।

$$1/2\,gt\,(T-t)$$

20. एक पत्थर इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि वह एक पेड़ की चोटी पर बैठे पक्षी को मारने के पश्चात् पेड़ की ऊंचाई से दुगुनी ऊंचाई तक ऊपर पहुंचेगा। यदि पत्थर के प्रक्षेपण के क्षण पर पक्षी क्षैतिज दिशा में उड़कर दूर जाने लगे, तो दर्शाओ कि इसके वावजूद भी पत्थर पक्षी पर आघात करेगा यदि उसके वेग एवं पक्षी के वेग का अनुपात है।

$$\sqrt{2}+1:2$$

21. एक चलायमान प्लेटफार्म पर से एक बन्दूक दागी जाती है; तथा गोली के परास R एवं S प्राप्त किये जाते हैं जबकि प्लेटफार्म V वेग से गतिमान है क्रमशः आगे को एवं पीछे को। सिद्ध करो कि बन्दूक का उन्नतांश है

$$\tan^{-1}\left\{\frac{g}{4v^2}\ \frac{(R-S)^2}{R+S}\right\}$$

22. एक प्रक्षेप्य u वेग से एक आनत तल पर प्रक्षिप्त किया जाता है। जब तल पर ऊपर की ओर परास महत्तम है, तब प्रक्षेप्य v_1 वेग से तल पर आघात करता है, एवं जब नीचे की ओर परास महत्तम है, तब प्रक्षेप्य v_2 वेग से तल पर आघात करता है; सिद्ध करो कि u वेग v_1 एवं v_2 का मध्यानुपाती (mean proportional) है।

23. दो आनत तल क्षितिज के एक सा कोण α बनाते हैं, तथा दोनों का शीर्ष लम्ब (altitude) h है वे एक दूसरे से मिलकर एक क्षैतिज तल पर रखे हैं। एक तल के अनु उसके आधार पर से इस तल तथा क्षैतिज तल की कटान रेखा से कोण β बनाते हुए एक गेंद प्रक्षिप्त की जाती है। चोटी के ऊपर उड़ने के उपरान्त वह दूसरे तल के आधार पर गिरती है। सिद्ध करो कि प्रक्षेपण वेग है

$$1/2\sqrt{gh}.\ \text{cosec}\,\beta.\ \sqrt{((8+\text{cosec}^2\,\alpha))}$$

24. α कोण पर नत एक तल के किसी बिन्दु O से नियत वेग से कण प्रक्षिप्त किया जाता है। सिद्ध करो कि वह क्षेत्रफल जो कण की परास के अन्तर्गत आयेगा एक दीर्घवृत्त से परिबद्ध है, जिसकी नाभि O है, उत्केन्द्रता $\sin\alpha$ है, तथा अर्ध-नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई उस ऊंचाई की दुगुनी है, जिससे गिरने पर प्रक्षेप वेग उत्पन्न होगा।

25. एक क्षैतिज तल पर स्थित तोप से गोला वेग $\sqrt{((2gH))}$ से दागा जा सकता है। तोप का उन्नतांश α से अधिक नहीं हो सकता, जहां $\alpha<\pi/4$ और ऊंचाई h की दीवार के ऊपर से गोला प्रक्षिप्त होना है। सिद्ध करो कि यह तभी संभव होगा जबकि $h<H\sin^2\alpha$; तथा सिद्ध करो कि यदि यह प्रतिबन्ध संतुष्ट हो, तो तोप तल की एक पट्टी के भीतर से दागी जानी चाहिये, जिसकी चौड़ाई है।

$$4\cos\alpha\sqrt{\{(H(H\sin^2\alpha-h)\}}$$

अध्याय 6

संघात
(Impact)

परिभाषा

6 .1 दो पिंड समक्ष संघात (Direct Impact)

करते हुए कहे जाते हैं यदि प्रत्येक की गति की दिशा उनके स्पर्श बिन्दु पर सार्व अभिलम्ब (common normal) के अनुरेख हो। यदि किसी एक की या दोनों की गति की दिशा सार्ग अभिलम्ब के अनु न हो तो वे तिर्यक संघात (oblique impact) करते हुए कहे जाते हैं। सार्व अभिलम्ब को संघात रेखा (line of impact) कहते हैं।

6.11 संपीडन एवं प्रत्यानयन (Compression and Restitution)

दो पिंडों के संघात का अंतराल, जबकि दोनों पिंड परस्पर स्पर्श करते रहते हैं, दो भागों में विभक्त किया जा सकता है—

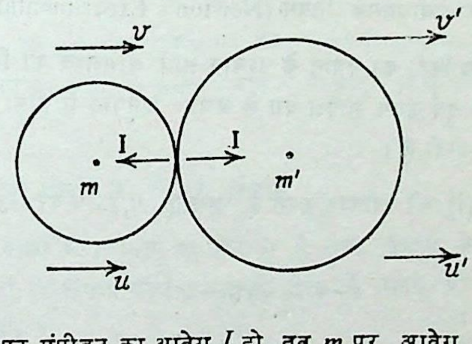
(i) संपीडन काल–जबकि प्रत्येक पिंड दूसरे को दबाता है (→←) तथा पिंडों के गुरुत्व केन्द्रों के मध्य की दूरी घटती चली जाती है; जब ये दूरी न्यूनतम होती है, तब संपीडन अधिकतम होता है।

(ii) प्रत्यानयन काल—में प्रत्येक पिंड फैलकर अपने मूल आकार को प्राप्त करने की चेष्टा करता है, अतः एक दूसरे को बाहर की ओर (←→) दबाते हैं।

अधिकतम संपीडन के क्षण पर दोनों पिंडों के मध्य दूरी न्यूनतम होती है, अतः उसके परिवर्तन की दर शून्य होती है। परिणामतः सार्व अभिलंब के अनु पिंडों का सापेक्ष वेग शून्य होता है। अतः अधिकतम संपीडन के क्षण पर सार्व अभिलम्ब की दिशा में दोनों पिंडों के वेगों के वियोजित अवयव बराबर होते हैं।

संघात के क्षणों में प्रत्येक पिंड दूसरे पर आवेगी क्रिया (Impulsive action) उत्पन्न करता है। गति के तृतीय नियम के अनुसार ये बल क्रिया एवं प्रतिक्रिया के रूप होते हैं, अतः किसी भी क्षण बराबर एवं विपरीत होते हैं।

मान लो दोनों पिंडों के द्रव्यमान m एवं m' हैं, संघात के पहिले दोनों केन्दों को जोड़ने वाली रेखा की दिशा में वेग u एवं u' हैं, तथा उसी दिशा में संघात के पश्चात् वेग हैं v एवं v', अधिकतम संपीडन के क्षण पर मान लो उनका उभयनिष्ठ वेग u है।



यदि m' पर संपीडन का आवेग I हो, तब m पर आवेग $-I$ होगा तथा हमें प्राप्त होगा—

$$\left.\begin{aligned} -I &= m \text{ के संवेग में परिवर्तन} = m(U-u) \\ +I &= m' \text{ के संवेग में परिवर्तन} = m'(U-u') \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{I}{m} + \frac{I}{m'} = u - u' \quad (2)$$

अधिकतम संपीडन के क्षण के पश्चात् प्रत्यानयन का अंतराल प्रारम्भ होता है। यदि प्रत्यानयन का आवेग I' हो, तब,

$$\left.\begin{aligned} -I' &= m \text{ के संवेग में परिवर्तन} = m(v-U) \\ +I' &= m' \text{ के संवेग में परिवर्तन} = m'(v'-U) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\therefore \quad I'/m + I'/m' = v' - V \quad (4)$$

(2) और (4) से हमें प्राप्त होगा—

$$I'/I = -\frac{v-v'}{u-u'} \quad (4)$$

(i) **पायसां का सिद्धांत** (Poisson's Hypothesis)

दो प्रत्यास्थ पिडों के मध्य प्रत्यानयन काल में उत्पन्न पारस्परिक क्रिया तथा संपीडन काल की क्रिया में एक निश्चित अनुपात होता है, चाहे उनके वेग कुछ भी हों। इस अनुपात को e से दर्शाते हैं।

(ii) **न्यूटन का प्रयोगात्मक नियम** (Newton's Experimental Law)

दो प्रत्यास्थ पिंडों का संघात के पश्चात् सार्व अभिलम्ब की दिशा में सापेक्ष वेग, संघात के पूर्व उनके सापेक्ष वेग से अचर अनुपात में होता है एवं उसकी दिशा विपरीत होती है।

यदि हम (i) को स्वीकार करते हैं, अर्थात् $I'/I=$अचर$=e$, तब (5) से हमें प्राप्त होगा—

$$v-v' = -e(u-u')$$

या यदि हम (ii) स्वीकार करते हैं, कि $\frac{v-v'}{u-u'} = -e$, तब हमें प्राप्त होता है—

$$I' = eI$$

अचर अनुपात e प्रत्यास्थता या प्रत्यानयन गुणांक (Coefficient of elasticity or restitution) है। यह केवल इस पर निर्भर करता है कि पिंड किस पदार्थ के बने हैं, उनके द्रव्यमान या संघात के पहिले के उनके वेग से यह स्वतन्त्र होता है। e का मान भिन्न पदार्थ के लिये भिन्न होता है, $0 \leqslant e \leqslant 1$; यदि $e=0$

हो, तो पिंडों को अप्रत्यास्थ कहते हैं एवं यदि $e=1$, तब उसे पूर्णतया प्रत्यास्थ कहते हैं।

6.12 दो चिकने गोलों का समक्ष संघात

पिछले अनुच्छेद के संकेतनों को मानते हुए

$$v'-v=-e(u' \quad u) \tag{1}$$

रैखिक संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त से हमें प्राप्त होगा—

$$mv+m'v'=mu+m'u' \tag{2}$$

(1) एवं (2) हल करने पर हमें प्राप्त होगा—

$$V=\frac{mu+m'u'-em'(u-u')}{m+m'}$$

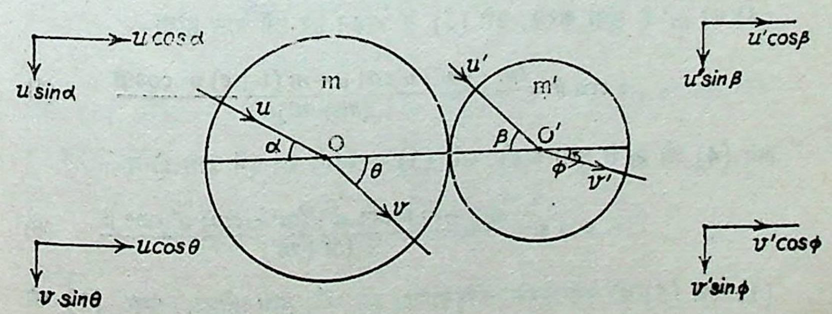
एवं

$$v'=\frac{mu+m'u'+em(u-u')}{m+m'}$$

उपप्रमेय : जब $m=m'$ एवं $e=1$ तब $v=u'$ एवं $v'=u$, अतः दो तुल्य और पूर्णतः प्रत्यास्थ गोलों के समक्ष संघात के पश्चात् उनके वेग परस्पर बदल जाते हैं।

6.2 दो चिकने गोलों का तिर्यक संघात

मान लो गोलों के द्रव्यमान m और m' हैं, तथा संघात के पूर्व उनके वेग u एवं u' हैं जो कि संघात रेखा से एक ही दिशा में नापने पर क्रमशः α एवं β कोणों पर झुके हैं।



मान लो संघात के पश्चात् उनके वेग V एवं v' हैं जो कि संघात रेखा से एक ही दिशा में नापने पर क्रमशः θ एवं θ' कोणों पर झुके हुए हैं। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है संघात के पूर्व गोलों के वेगों के अवयव OO' दिशा में एवं उसके लम्बानुरेख क्रमशः $u \cos \alpha$, $u' \cos \beta$, एवं $u \sin \alpha$ $u' \sin \beta$ हैं। संघात के उपरांत यही अवयव क्रमशः $v \cos \theta$, $v' \cos \phi$ एवं $v \sin \theta$, $v' \sin \phi$ हैं।

क्योंकि गोले चिकने है, इसलिये उनके स्पर्श बिन्दु पर कोई स्पर्शीय बल नहीं होगा, परिणामतः गोलों के वेगों के संघात रेखा के लम्बानुरेख वियोजित अवयवों में कोई परिवर्तन नहीं होगा— इससे हमें दो समीकरण प्राप्त होते हैं–

$$u \sin \alpha = v \sin \theta \tag{1}$$

$$u' \sin \beta = v' \sin \phi \tag{2}$$

चूंकि दोनों गोलों के संघात के क्षणों में उत्पन्न आवेगी क्रियाएँ, केन्द्र रेखा OO' की दिशा में बराबर एवं विपरीत होगी, अतः दोनों गोलों को सम्मिलित रूप से देखने पर इस दिशा में उन पर कोई आवेग नहीं होगा। अतएव OO' दिशा में उनका सम्मिलित संवेग संघात से अपरिवर्तित रहता है, अर्थात केन्द्र रेखा OO' की दिशा में संवेग संरक्षण के सिद्धांत से हमें प्राप्त होगा—

$$mu \cos \alpha + m'u' \cos \beta = mv \cos \theta + m'v' \cos \phi \tag{3}$$

केन्द्र रेखा के अनु सापेक्ष वेगों के लिये न्यूटन के प्रयोगात्मक नियम के द्वारा हमें प्राप्त होगा—

$$-e(u \cos \alpha - u' \cos \beta) = v \cos \theta - v' \cos \theta \tag{4}$$

चार अज्ञात राशियों v, v', θ एवं ϕ को ज्ञात करने के लिये उपरोक्त चार समीकरण (1), (2), (3) एवं (4) पर्याप्त हैं।

(4) को m' से गुणा करके, उसे (3) से जोड़ने पर हमें प्राप्त होगा—

$$v \cos \theta = \frac{(m - em')\, u \cos \alpha + m'(1+e)\, u' \cos \beta}{(m+m')} \tag{5}$$

अब (4) को m से गुणा करके, उसे (3) से घटाने पर हमें प्राप्त होगा—

$$v' \cos \phi = \frac{m(1+e)\, u \cos \alpha + (m^2 - em)\, u' \cos \beta}{(m+m')} \tag{6}$$

(1) एवं (5) को वर्ग करके जोड़ने पर, हमें v^2 प्राप्त होगा, तथा (1) को

(5) से विभाजित करने पर $\tan \theta$ प्राप्त होगा। इसी प्रकार (2) और (6) से v'^2 एवं $\tan \phi$ प्राप्त हो जायेगा।

विशेष स्थितियाँ (Particular cases)

(i) यदि $u'=0$, तब (2) से $v' \sin \phi=0$

$$\text{अतः } \phi=0, \text{ चूंकि } v' \neq 0$$

यदि गोला m' विरामावस्था में है, तब वह संघात के पश्चात केन्द्र रेखा के अनु गतिशील होगा।

(ii) यदि $m=m'$, $e=1$, हमें प्राप्त होता है, (5) एवं (6) से

$$v \cos \theta=u' \cos \beta$$

एवं

$$v' \cos \phi=u \cos \alpha$$

उपसिद्धान्त : जब दो तुल्य एवं पूर्णतः प्रत्यास्थ गोले संघात करते हैं, तो केन्द्र रेखा के अनुरेख वियोजित उनके वेग परस्पर बदल जाते हैं।

(iii) यदि दो तुल्य एवं पूर्णतः प्रत्यास्थ गोले लम्ब रूप दिशाओं में संघात करते हैं, तब संघात के बाद भी वे लम्बरूप दिशाओं में गतिमान होंगे।

उपपत्ति : हम निम्न समीकरणों का उपयोग करेंगे–

$$V \sin \theta=u \sin \alpha \qquad (1)$$

$$v' \sin \phi=u' \sin \beta \qquad (2)$$

चूंकि $m=m'$, तथा $e=1$, अतः हमने प्राप्त किया है

$$v \cos \theta=u' \cos \beta \qquad (7)$$

$$v' \cos \phi=u \cos \alpha \qquad (8)$$

अतः (1) और (2) के गुणनफल में (7) और (8) के गुणनफल का भाग देने पर प्राप्त होगा–

$$\frac{V \sin \theta \, v' \sin \phi}{v \cos \theta \, v' \cos \phi}=\frac{u \sin \alpha' \, u' \sin \beta}{u' \cos \beta . u \cos \alpha}$$

अर्थात

$$\tan \theta . \tan \phi=\tan \alpha . \tan \beta$$

यदि संघात के पहिले पिन्ड लम्बरूप दिशाओं में गतिमान है,

तब

$$\tan \alpha . \tan \beta = -1 = \tan \theta \tan \phi$$

अतः संघात के उपरान्त भी उनकी दिशायें परस्पर समकोण पर झुकी रहेंगी।

उदाहरण (1) m द्रव्यमान की एक गेंद किसी दूसरी m' द्रव्यमान की गेंद पर, जो विरामावस्था में है, संघात करती है। यदि $m=em'$ हो तो सिद्ध करो कि गेंदे एक दूसरे के लम्बरूप दिशाओं में गतिमान होंगी।

पिछले अनुच्छेद के (2) से हमें ज्ञात है कि

$$v' \sin \phi = u' \sin \beta$$

यदि $u'=0$, तब $\sin \phi$, अर्थात $\phi=0$

अतः संघात के पश्चात दूसरी गेंद केन्द्र रेखा के अनु गतिमान होगी। अब केन्द्र रेखा के अनु संवेग के संरक्षण सिद्धान्त से हमें प्राप्त होगा—

$$mv \cos \theta + m'v' = mu \cos \alpha,$$

चूंकि

$$\phi=0, u'=0$$

इसी दिशा में न्यूटन के सिद्धांत से प्राप्त होगा

$$v \cos \theta - v' = -eu \cos \alpha$$

अतः

$$v' = v \cos \theta + eu \cos \alpha$$

v' के मान को उपरोक्त समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होगा—

$$mv \cos + m'(v \cos \theta + eu \cos \alpha) = mu \cos \alpha$$

अर्थात

$$(m+m') v \cos \theta + em'u \cos \alpha = mu \cos \alpha$$

चूंकि

$$m = em',$$

अतः

$$(m+m') v \cos \theta = 0$$

अतएव

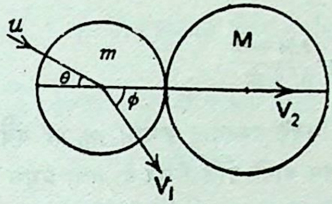
$$\theta = \pi/2$$

अतः निष्कर्ष निकला कि दोनों गेंदे एक दूसरे के लम्बरूप गतिमान होंगी।

(2) m द्रव्यमान का एक चिकना गोला u वेग से, द्रव्यमान के एक गोले से, जो विरामावस्था में है, तिर्यक संघात करता है। पहले गोले के आरम्भिक दिशा संघात के समय केन्द्र रेखा से कोण θ बनाती है। सिद्ध करो कि m द्रव्यमान का गोला संघात के पश्चात एक समकोण से विललित हो जायेगा, यदि

$$\tan^2\theta = \frac{eM-m}{M+m}$$

मान लो कि m एवं M द्रव्यमान के गोलों के संघात के बाद वेग v_1 एवं v_2 हैं, v_1 केन्द्र रेखा से ϕ कोण पर झुकी है एवं v_2 केन्द्र रेखा के अनु है।



m का समीकरण केन्द्र रेखा के लम्बरूप दिशा में होगा—

$$V_1 \sin\phi = u \sin\theta \tag{1}$$

केन्द्र रेखा की दिशा में संवेग के संरक्षण सिद्धान्त से प्राप्त होगा—

$$mv_1 \cos\phi + Mv_2 = mu \cos\theta \tag{2}$$

न्यूटन के नियम से प्राप्त होगा

$$v_1 \cos\phi - v_2 = eu \cos\theta \tag{3}$$

यदि

$$\phi - \theta = 90,$$

अर्थात

$$\phi = \theta + 90$$

तब

$$\cos\phi = \cos(\theta + 90) = -\sin\theta$$

तथा

$$\sin\phi = \sin(\theta + 20) = \cos\theta$$

अत: (1) से

$$v_1 \cos\theta = u \sin\theta \tag{4}$$

(2) से

$$-mv_1 \sin\theta + Mv_2 = mu \cos\theta \tag{5}$$

तथा (3) से

$$v_2 = eu\cos\theta - v_1\sin\theta$$

अब v_3 का मान (5) में रखने पर

$$mu\cos\theta = -mv_1\sin\theta + M(eu\cos\theta - v_1\sin\theta)$$

$$= Meu\cos\theta - (M+m)\,v_1\sin\theta$$

अत: (4) से v_1 का मान रखने पर

$$(M+m) = \frac{u\sin^2\theta}{\cos\theta} = (eM-m)\,u\cos\theta$$

अत:

$$\tan^2\theta = \frac{eM-m}{M+m}$$

(3) तीन गोले जिनके द्रव्यमान क्रमश: m, m' एवं M हैं एक ही सरल रेखा में स्थिर हैं। अन्तिम दोनों गोले स्थिर हैं, तथा प्रथम उसी सरल रेखा में वेग u से चलकर दूसरे से संघात करता है, जो कि बाद में तीसरे से। संघात के पश्चात तृतीय गोले का वेग ज्ञात करो।

यदि प्रथम एवं तृतीय गोलों के द्रव्यमान ज्ञात हों, तो सिद्ध करो कि तृतीय गोले का संघात के उपरान्त वेग अधिकतम उसी स्थिति में होगा जबकि द्वितीय गोले का द्रव्यमान शेष दोनों के द्रव्यमानों का मध्यानुपाती हो, तथा तब वेग होगा—

$$\frac{(1+e)^2\,mu}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2}$$

पहले m और m' का संघात होगा; मान लो कि संघात के पश्चात उनके वेग v तथा v' हैं, तब

संवेग संरक्षण से

$$mv + m'v' = mu$$

तथा न्यूटन के नियम से

$$v - v' = -eu$$

अत:

$$M'v' + m(v' - eu) = mu$$

अर्थात

$$v' = \frac{mu(1+e)}{m+m'}$$

इसी प्रकार m' एवं M के संघात के पश्चात यदि M का वेग V है तब

$$V = \frac{m'v'(1+e)}{m'+M} = \frac{m'mu(1+e)^2}{(m'+M)\,(m+m')}$$

अतः

$$V = \frac{mu\,(1+e)^2}{\left(1+\frac{m}{m'}\right)(m'+M)} \qquad (A)$$

चूंकि m तथा M दिये हैं, V का मान महत्तम होगा जबकि

$$\left(1+\frac{m}{m'}\right)(m'+M) = m'+m+M+\frac{mM}{m'} \text{ न्यूनतम}$$
$$= f(m')$$

$f(m')$ का अवकलन m' के सापेक्ष करके अवकल गुणांक को शून्य के बराबर करने पर हमें प्राप्त होगा

$$f'(m') = 1-\frac{mM}{m'^2} = 0, \text{ अर्थात } m' = \sqrt{(mM)}$$

अतः m' का मान V के मान (A) में प्रतिस्थापित करने पर

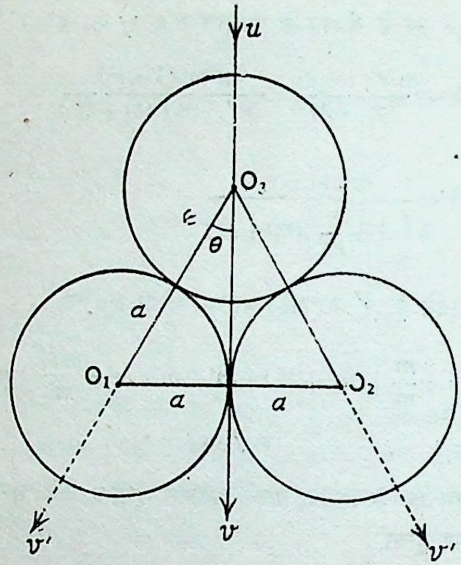
$$V = \frac{mu(1+e)^2}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2}$$

(4) a त्रिज्या की दो बराबर गेंदें एक दूसरे को स्पर्श करती हुई रखी हैं। त्रिज्या c की तीसरी गेंद इनके सार्व स्पर्शी के अनुरेख आकर इन दोनों से एक साथ टकराती है। यदि सब गेंदें एक ही पदार्थ की बनी हों तथा प्रत्यास्थता गुणांक e हो, तो संघात के उपरांत उनके वेग ज्ञात करो; तथा सिद्ध करो कि टकराने वाली गेंद विरामावस्था पर आ जायेगी यदि,

$$2e = \frac{c^2(a+c)^2}{a^3(2a+c)}$$

मान लो तीसरी गेंद वेग u से संघात करती है। चित्र की सममिति से यह स्पष्ट है कि संघात के बाद बराबर गेंदें बराबर वेग v' से केन्द्र रेखा O_3O_1 एवं O_3O_2

की दिशा में गतिमान होंगी; क्योंकि यदि उनके वेग भिन्न है, मान लो v_1 एवं u_2, तब संघात के बाद O_1O_2 दिशा में संवेग होगा—



$$mu_1 \sin\theta - mv_2 \sin\theta$$

जो कि शून्य होना चाहिये, चूंकि संघात के पहिले इस दिशा में संवेग शून्य था। अत: $v_1 = v_2$ होना चाहिए, इस वेग को चित्र में v' से दर्शाया है। अब वेग u की दिशा में संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से प्राप्त होगा—

$$Mu = 2mv' \cos\theta,$$

जहाँ

$$\sin\theta = \frac{a}{a+c}$$

इससे v' प्राप्त हो जाता है। इसी दिशा में न्यूटन के नियम से प्राप्त होगा—

$$v \cos\theta - v' = -eu \cos\theta$$

इससे v प्राप्त हो जाता है। यदि $v=0$, तब

$$v' = eu \cos\theta$$

अत:

$$Mu = 2m\, eu \cos^2\theta$$

चूंकि तीनों गेंदें एक ही पदार्थ की बनी हैं, अतः

$$M/m = c^3/a^3$$

अर्थात

$$c^3 = 2e\, a^3 \left[1 - \frac{a^2}{(a+c)^2} - 2 \right], \cos^2 \theta$$

का मान रखने पर।

अतः

$$c^3 = 2e.a^3 \left[\frac{c^2 + 2ac}{(a+c)^2} \right]$$

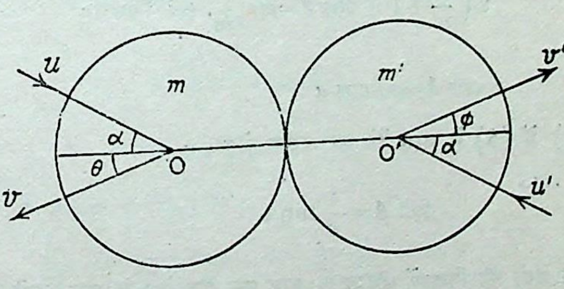
$$\therefore \qquad 2e = \frac{c^2(a+c)^2}{a^3(2a+c)},$$

यही सिद्ध करना था।

(5) दो चिकनी गेंदें, जिनका प्रत्यास्थता गुणांक e है, दो समानान्तर रेखाओं के अनु एक दुसरे की ओर अग्रसर होते हैं। इनके संवेग समान, पर विपरीत दिशाओं में है। सिद्ध करो कि तिर्यक संघात के उपरान्त भी ये गोले समान्तर रेखाओं पर समान संवेग से गतिमान होंगे।

यदि संघात के पहिले वे केंद्र रेखा से α कोण की आनति पर गतिमान थे, तो सिद्ध करो कि संघात के उपरांत प्रत्येक की दिशा एक समकोण से घूम जायेगी यदि,

$$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{e}$$



गेंदों के द्रव्यमान m, m' हैं। मान लो संघात के पहले उनके वेग u तथा u' हैं, उनकी दिशाएँ समान्तर एवं विपरीत हैं, जो कि केन्द्र रेखा OO' से कोण α पर झुकी हैं। मान लो संघात के उपरांत उनके वेग v, v, हैं, उनकी दिशाएँ केन्द्र रेखा से θ एवं ϕ कोण पर झुकी हैं। तब हमें निम्न चार समीकरण प्राप्त होते हैं—

$$u \sin \alpha = v \sin \theta \quad (1)$$

$$u' \sin \alpha = v' \sin \phi \quad (2)$$

$$mu \cos \alpha - m'u' \cos \alpha = m'v' \cos \phi = mv \cos \theta \quad (3)$$

तथा

$$v' \cos \phi + v \cos \theta = e(u \cos \alpha + u' \cos \alpha) \quad (4)$$

दिया है $mu = m'u'$, अतः (3) से

$$m'v' \cos \phi = mv \cos \theta$$

अतः

$$\frac{v \cos \theta'}{v' \cos \phi} = \frac{m'}{m} = \frac{u}{u'} = \frac{v \sin \theta}{v' \sin \phi}$$

(1) और (2) से

अर्थात्

$$\tan \theta = \tan \phi \text{ या } \phi = \theta$$

अतः संघात के उपरान्त गेंदें समान्तर दिशाओं में गतिमान होती हैं।

अतः

$$m'v' = mv$$

अर्थात संघात के पश्चात उनके संवेग के बराबर हैं।

अब (4) में v' एवं u' का मान रखने पर

$$v\left(\frac{m}{m'}+1\right) \cos \theta = eu\left(\frac{m}{m'}+1\right) \cos \alpha$$

अर्थात

$$v \cos \theta = eu \cos \alpha \quad (5)$$

अतः (1) में (5) से भाग देने पर प्राप्त होगा—

$$\tan \theta = \frac{1}{e} \tan \alpha$$

यदि गेंदों की दिशायें संघात के बाद एक समकोण से घूम जाती है, तब

$$\theta = \pi/2 - \alpha,$$

अतः

$$\tan (\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{e} \tan \alpha$$

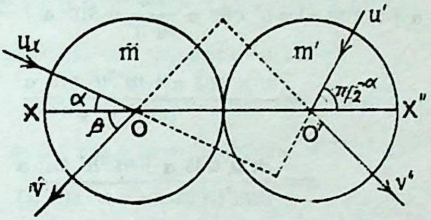
$$\therefore \qquad \tan^2 \alpha = e,$$

या

$$\alpha = \tan^{-1} \sqrt{e}$$

(6) द्रव्यमान m तथा m' के दो चिकने गोले परस्पर लम्ब दिशाओं में वेग तथा u' से गतिमान होते हुए संघात करते हैं। यदि u की दिशा केन्द्र रेखा से कोण α बनाती हो, तथा संघात के उपरान्त भीं गोलों की गति परस्पर लम्ब दिशाओं में हो, तो सिद्ध करो

$$e = \frac{m^2 u \cos \alpha + m'^2 u \sin \alpha}{mm' (u \cos \alpha + u' \sin \alpha)}$$



मान लो u की OX से आनति α है, तथा u' की OX' से $\pi/2-\alpha$ तथा संघात के उपरान्त उनके वंग v और v' हैं जिनकी आनतियाँ OX एवं OX' से क्रमश: β एवं $\pi/2-\beta$ हैं क्योंकि हमें दिया गया है कि u एवं u' तथा v एवं v' परस्पर लम्बरूप हैं।

संघात से OO' के लम्बरूप दिशा में वेगों के अवयवों में कोई परित्रर्तन नहीं होगा, अत:

$$u \sin \alpha = v \sin \beta \tag{1}$$

एवं

$$u' \cos \alpha = v' \cos \beta \tag{2}$$

अब न्यूटन के संवात के नियम से

$$e(u' \sin \alpha + u \cos \alpha) = v' \sin \beta + v \cos \beta \tag{3}$$

तथा रैखिक संवेगों के संरक्षण के सिद्धान्त से हमें प्राप्त होगा

$$m'v' \sin \beta - ms \cos \beta = mu \cos \alpha - m'u' \sin \alpha \tag{4}$$

(1) और (2) से v एवं v' के मान (4) में प्रतिस्थापन करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$m'u' \cos \alpha \tan \beta - mu \sin \alpha \cot \beta = mu \cos \alpha - m'u' \sin \alpha$$

अर्थात्

$$m'u'(\cos \alpha, \tan \beta + \sin \alpha) = mu(\cos \alpha + \sin \alpha \text{ eot } \beta)$$

$$= \frac{mu}{\tan \beta} (\cos \alpha \,.\, \tan \beta + \sin \alpha)$$

अतः

$$\tan \beta = \frac{mu}{m'u'} \tag{5}$$

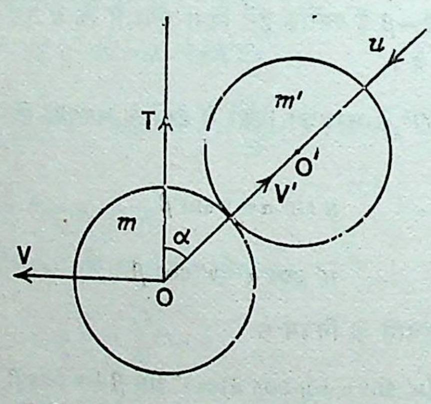
अब (1), (2) और (5) से v, v' और $\tan \beta$ क माल (3) में प्रतिस्थापन करने पर

$$e(u' \sin \alpha + u \cos \alpha) = u' \cos \alpha \frac{mu}{m'u'} + \sin \alpha \,.\, \frac{m'u'}{m}$$

$$= \frac{m^2 u \cos \alpha + m'^2 u' \sin \alpha}{mm'}$$

$$\therefore \qquad e = \frac{m^2 u \cos \alpha + m'^2 u' \sin \alpha}{mm'(u \cos \alpha + u' \sin \alpha)}$$

(7) m द्रव्यमान की एक चिकनी गोल गेंद किसी हल्की अवितान्य डोरी द्वारा किसी बिन्दु से बंधी है । एक दूसरी गोल गेंद, जिसका द्रव्यमान m' है,



इससे समक्ष संघात करती है । दूसरी गेंद का वेग u है, तथा इसकी दिशा डोरी से न्यूनकोण बनाती है । सिद्ध करो कि जिस वेग से m गति प्रारम्भ करेगा वह होगा।

$$\frac{m' \sin \alpha\, (1+e)u}{m + m' \sin^2 \alpha}$$

मान लो m गेंद v वेग से गतिमान होती है, यह स्पष्ट है कि उसकी दिशा डोरी के लम्बरूप ही सम्भव है। मान m' गेंद संघात के पश्चात OO' दिशा में v' वेग से वापिस लौटती है। डोरी के लम्ब रूप में दिशा में कोई बाह्य बल न होने से, इस दिशा में संवेग संरक्षण से प्राप्त होगा

$$m'u \sin a = mv - m'v' \sin a \quad \text{(i)}$$

तथा OO' दिशा में न्यूटन के सिद्धान्त से प्राप्त होगा

$$v' + v \sin a = eu \quad \text{(ii)}$$

(iii) से v' का मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होगा

$$m'u \sin a = mv - m' \sin a\,(eu - v \sin a)$$

$$= mv - m' \sin a \,.\, eu + m'v \,.\, \sin^2 a$$

$$\therefore \quad m'u \,.\, \sin a\,(1+e) = v(m + m' \sin^2 a)$$

अतः

$$V = \frac{m' \sin a \,.\, (1+e)u}{m + m' \sin^2 a}$$

प्रश्नावली 25

8. कोई गोला तुल्य द्रव्यमान वाले किसी विश्रान्त गोले से समक्ष संघात करता है, यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो दर्शाओ कि संघात के पश्चात् उनके वेग $1-e : 1+e$ अनुपात होंगे।

9. 5 गेंदें एक सरल रेखा में विश्रामावस्था में स्थित हैं। उनके द्रव्यमान एक गुणोत्तर श्रेणी में हैं, जिसका अनुपात 2 है और उनके प्रत्यानयन गुणांक 2/3 हैं। यदि पहली गेंद दूसरी की ओर u वेग से चला दी जाये, तो सिद्ध करो कि पांचवी गेंद में $(5/g)^4\, u$ वेग संचारित हो जायेगा।

10. तीन गोले, जिनके द्रव्यमान क्रमशः 2 पौंड, 6 पौंड और 12 पौंड हैं, और जिनके वेग क्रमशः 12, 4 और 2 फुट प्रति सेकन्ड हैं, एक सरल रेखा में उपर्युक्त क्रम में गतिमान हैं। यदि प्रत्यानयन-गुणांक एक हो, तो दर्शाओ कि पहले दो गोले, होने वाले संघट्टों द्वारा विरामावस्था में कर दिये जायेंगे।

11. एक गेंद एक दूसरी तुल्य गेंद से जो समान वेग से पहली के लम्बवत् दिशा में गतिशील है, टकराती है। संघात के समय दोनों गेंदों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा दूसरी गेंद की गति की दिशा के लम्बवत् है, यदि प्रत्यास्थता गुणांक e हो, तो सिद्ध करिये कि दूसरी गेंद की गति की दिशा

$$\tan^{-1}\frac{1\mp e}{2}$$

कोण से घूम जायेगी।

12. त्रिज्या γ के दो तुल्य चिकने गोले एक ही चाल से दो समानान्तर रेखाओं पर विपरीत दिशाओं में गतिमान हैं, रेखाओं के बीच की दूरी c है। सिद्ध करो कि संघात के बाद प्रत्येक गोले की गति की दिशा एक समकोण से घूम जायेगी यदि,

$$c^2(1+e)=4e\gamma^2$$

जहाँ e प्रत्यानयन गुणांक हैं।

13. दो तुल्य गोले, जिनका प्रत्यानयन गुणांक e है, आपस में संघात करते हैं। संघात के पूर्व सार्व अभिलम्ब के अनु उनके वेग u_1, v_1 हैं, तथा अभिलम्ब के लम्बानुरेख वेग u_2, v_2 हैं। यदि संघात के उपरान्त गोले परस्पर लम्ब दिशाओं में गतिमान हों, तो सिद्ध करो

$$(u_1+v_1)^2+4u_2v_2=\left(\frac{e^2}{u_1}-v_1\right)^2$$

14. तीन समान गोले किसी मेज पर एक ही सरल रेखा में दूर-दूर स्थित हैं। इनमें से एक गोला अन्य दोनों की ओर, जो विरामावस्था में है, किसी वेग से गतिमान होता है। यदि प्रत्यानयन गुणांक $\frac{1}{2}$ हो, तो ज्ञात करो कि कुल कितने संघात होंगे। सिद्ध करो कि अनन्तः गोलों के वेगों का अनुपात होगा

$$13 : 15 : 36$$

15. एक चिकनी गेंद अपने तुल्य एक दूसरी गेंद से संघात करती है, जो स्थिर है। संघात के क्षण पर पहली गेंद की दिशा केन्द्र रेखा से कोण a बनाती है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो सिद्ध करो कि संघात करने वाली गेंद की दिशा के विचलित होने का कोण होगा

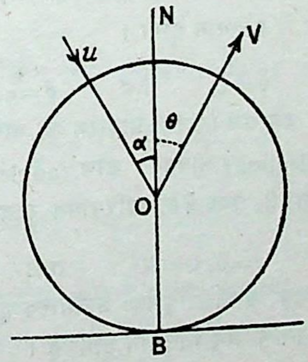
$$\tan^{-1}\frac{(1+e)\tan\alpha}{(1-e)\,2\tan^2\alpha}$$

16. दो बराबर कंचे A एवं B एक चिकनी गोल खांच (groove) के व्यास के सिरों पर स्थित हैं। A को खांच के अनु प्रक्षिप्त किया गया और वह t सेकन्ड पश्चात् B से संघात करती है। दर्शाओ कि उनका दूसरा संघट्ट $2t/e$ सेकन्ड पश्चात् होगा।

17. m' द्रव्यमान के दो तुल्य गोले ऊर्ध्वाधर डोरियों के द्वारा इस प्रकार लटकाये गये हैं कि वे परस्पर स्पर्श कर रहे हैं, तथा उनके केन्द्र एक ही क्षैतिज स्तर पर हैं एक तीसरा तुल्य गोला, जिसका द्रव्यमान m है, ऊर्ध्वारतः गिरता है तथा दूसरे दोनों गोलों को इस प्रकार एक साथ संघात करता है कि संघात के क्षण तीनों के केन्द्र एक ऊर्ध्वाधर तल में समत्रिबाहु त्रिभुज बनाते हैं। यदि संघात के समय m का वेग u है, तो संघात के पश्चात् उनके वेग तथा डोरियों के आवेगी तनाव ज्ञात करो।

6.3 चिकने स्थिर तल से संघात (Impact on a fixed smooth plane)

मान लो कि m द्रव्यमान का एक चिकना गोला किसी चिकने तल से, तल की अभिलम्ब से α कोण बनाता हुआ u वेग से टकराता है। मान लो कि संघात पश्चात उसका वेग v है, जिसकी दिशा अभिलम्ब से कोण θ पर झुकी है।



क्योंकि संघात के क्षणों में गोले तथा तल के बीच समस्त क्रिया केवल सार्व अभिलम्ब BN के अनु चेष्टित रहती है, इसलिये तल के अनु गोले का वियोजित वेग अपरिर्वित रहता है।

$$\therefore \qquad v \sin \theta = u \sin \alpha \qquad (1)$$

न्यूटन के प्रयोगात्मक नियम से, सार्व अभिलम्ब BN की दिशा में

$$v \cos \theta = -e(-u \cos \alpha) = eu \cos \alpha \qquad (2)$$

(1) और (2) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$v^2 = u^2 (\sin^2 \alpha + e^2 \cos^2 \alpha)$$

(2) को (1) से भाग देने पर

$$\cot \theta = e \cot \alpha$$

आघात का आवेग (Impulse of the blow)

$$= \text{गोले के संवेग में परिवर्तन}$$

$$= mu \cos \alpha - (-mv \cos \theta)$$

$$= m(1+e)\, u \cos \alpha$$

विशेष स्थितियां :

यदि

$$\alpha = 0, \theta = 0$$

तथा

$$v = eu$$

अतः गोला जब u वेग से तल से समक्ष संघात करेगा, तब संघात के पश्चात् eu वेग से विपरीत दिशा में गतिमान होगा।

(i) यदि $e=1$, तब $\theta=\alpha$, तथा $v=u$
अर्थात् जब तल पूर्णतः प्रत्यास्थ हो, तब परावर्तन कोण (angle of reflection) आपतन कोण (angle of incidence) के बराबर होता है, तथा वेग अपरिवर्तित रहता है।

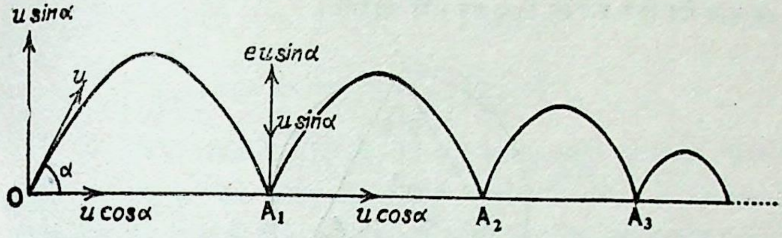
(ii) यदि $e=0, 0=90$, तथा $v=u \sin \alpha$
अतः जब समतल पूर्णतः अप्रत्यास्थ हो, तब संघात के पश्चाद् गोला तल के अनु गतिमान होता है।

उदाहरण :

(1) किसी चिकने क्षैतिज समतल के किसी बिन्दु से कोई कण u वेग से, क्षितिज से α कोण पर, प्रक्षिप्त किया गया ; यदि कण और

समतल के बीच प्रत्यानयन गुणांक e है, तो सिद्ध करो कि प्रतिक्षेप (rebound) बन्द होने से पहिले कण समतल के अनु दूरी चल लेगा ।

$$\frac{u^2}{g}\frac{\sin 2\alpha}{1-e}$$



आदि ऊर्ध्वाधर वेग $u \sin \alpha$ एवं क्षैतिज वेग $u \cos \alpha$ है । प्रथम प्रतिक्षेप के पश्चात् ऊर्ध्वाधर वेग $eu \sin \alpha$ हो जायेगा, लेकिन संघात से वेग के क्षैतिज अवयव में कोई परिवर्तन नहीं होगा । आगे के प्रतिक्षेपों के पश्चात् कण के ऊर्ध्वाधर वेग क्रमशः $e^2u \sin \alpha$, $e^3u \sin \alpha$...आदि होते जायेंगे । O से प्रक्षिप्त होने के पश्चात् A_1 तक तल पर पहुंचने का समय होगा $2u \sin \alpha/g$; इसी प्रकार A_1 से प्रतिक्षेप के पश्चात् A_2 तक पहुंचने का समय होगा $2eu \sin \alpha/g$; तथा इसी प्रकार तृतीय प्रक्षेप पथ का समय $2e^2u \sin \alpha/g$ होगा ।

अतः जब कण प्रतिक्षिप्त होना बन्द करता है, तब तक समय

$$=\frac{2u \sin \alpha}{g}+\frac{2eu \sin \alpha}{g}+\frac{2e^2u \sin \alpha}{g}+\ldots \text{अनन्त पदों तक}$$

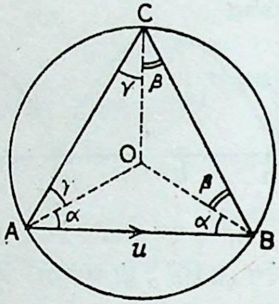
$$=\frac{2u \sin \alpha}{g}\left[1+e+e^2+\ldots\right]=\frac{2u \sin \alpha}{g}\cdot\frac{1}{1-e}$$

यह एक अभिसारी गुणोत्तर श्रेणी है, क्योंकि अनुपात $e<1$.
इस संपूर्ण समय में क्षैतिज वेग, संघाती से अपरिवर्तित रहता हुआ, सदा $u \cos \alpha$ है ।

अतः चलित क्षैतिज दूरी

$$=\frac{2u \sin \alpha}{g}\frac{1}{1-e}\times u \cos \alpha=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g(1-e)}$$

(2) एक चिकनी गोल मेज के चारों ओर एक चिकना सीधा उठा हुआ किनारा लगा है। एक गेंद, जिसका प्रत्यानयन गुणांक e है, किनारे के एक बिन्दु से मेज पर प्रक्षिप्त की जाती है। इसकी दिशा बिन्दुगत त्रिज्या से कोण $\tan^{-1}\sqrt{\left(\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)\right)}$ बनाती है। सिद्ध करो कि दो बार किनारे से टकराने के बाद गेंद फिर प्रक्षेपण बिन्दु पर लौट आयेगी।



मान लो गेंद A बिन्दु से प्रक्षिप्त की गई, तथा B एवं C पर प्रतिक्षेप करके A पर पुनः लौट आती है। A, B, C पर अभिलम्ब क्रमशः OA, OB एवं OC हैं। स्पष्ट है कि

$\angle OAB=\angle OBA=\alpha$, मान लो ; $\angle OBC=\angle OCB=\beta$, तथा $\angle OCA=\angle OAC=\gamma$.

B पर हुए संघात से $\cot\beta=e\cot\alpha$ . . . (1)

C पर हुए संघात से $\cot\gamma=e\cot\beta=e^2\cot\alpha$ . . . (2)

लेकिन

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\pi/2-\gamma$$

$$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\tan(\pi/2-\gamma)=\cot\gamma=e^2\cot\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha.\cot\beta-1}=e^2\cot\alpha$$

या

$$\frac{\cot\alpha+e\cot\alpha}{e\cot^2\alpha-1}=e^2\cot\alpha,\ (1)\text{ से}$$

या

$$1+e=e^3 \cot^2 \alpha-e^2$$

या

$$\cot^2 \alpha=\frac{1+e+e^2}{e^3}$$

या

$$\tan^2 \alpha=\frac{e^3}{1+e+e^2}$$

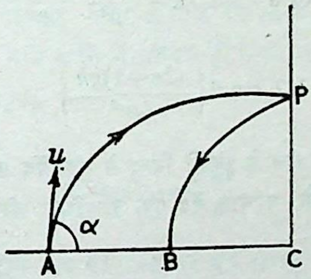
या

$$\alpha=\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)}$$

3. किसी चिकनी सीधी दीवाल से h दूरी पर भूमि पर स्थित किसी बिन्दु A से एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि दीवाल से प्रतिक्षिप्त होकर कण A दीवाल के ठीक मध्य पर गिरे। सिद्ध करो कि प्रक्षेपण कोण है

$$1/2 \ \sin^{-1}\left\{\frac{(2e+1)gh}{2eu^2}\right\},$$

जहां u प्रक्षेप वेग है ।



दिया है $AC=h$, एवं $BC=h/2$ A से u प्रक्षेप वेग एवं क्षैतिज से α प्रक्षेप कोण पर कण प्रक्षिप्त किया गया। प्रक्षेप वेग के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर अवयव क्रमशः $u \cos \alpha$ एवं $u \sin \alpha$ हैं। A से P तक की गति के अन्तराल में क्षैतिज वेग, $u \cos \alpha$, अचर रहता है ; अतः A से P तक गति का समय $t_1=h/u \cos \alpha$ जब कण P बिन्दु पर दीवाल से टकरायेगा, तब संघात के पश्चात् वेग का क्षैतिज अवयव $eu \cos \alpha$ हो जायेगा, फिर P से B तक की गति में यह क्षैतिज अवयव अचर रहेगा। अतः P से B तक भूमि पर आने का समय,

$$t_2=\frac{h/2}{eu \cos \alpha}=\frac{h}{2\,eu \cos \alpha}$$

अतः संपूर्ण उड्डयन काल

$$=t_1+t_2=\frac{h}{u\cos\alpha}\left(1+\frac{1}{2e}\right)$$

$$=\frac{h}{u\cos\alpha}\left(\frac{2e+1}{2e}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

लेकिन जब कण चिकनी दीवाल पर संघात करता है, तब उसके वेग का ऊर्ध्वाधर अवयव संघात से अपरिवर्तित रहता है, क्योंकि वह चिकनी दीवाल के अनु है, अतः A से प्रक्षिप्त होकर फिर से भूमि पर आने का संपूर्ण उड्डयन काल होगा

$$\frac{2u\sin\alpha}{g} \quad (2)$$

अतः (1) और (2) को बराबर करने पर प्राप्त होगा

$$\frac{2u\sin\alpha}{g}=\frac{h}{u\cos\alpha}\left(\frac{2e+1}{2e}\right)$$

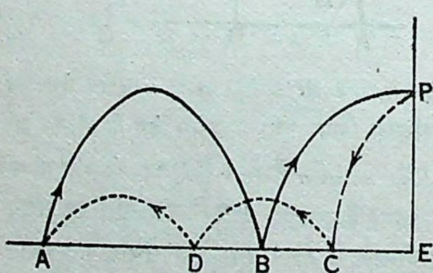
अर्थात्

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=\frac{gh}{2u^2}\frac{(2e+1)}{e}$$

या

$$\alpha=1/2\ \sin^{-1}\left\{\frac{(2e+1)gh}{2eu^2}\right\}$$

(4) एक क्षैतिज तल के किसी बिन्दु से एक गेंद प्रक्षिप्त की जाती है। तल पर एक प्रतिक्षेप के पश्चात गेंद एक ऊर्ध्वाधर दीवार से समक्ष संघात



करती है ; फिर तल पर दो बार प्रतिक्षिप्त होकर वह प्रक्षेपण बिन्दु पर लौट आती है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो सिद्ध करो कि

$$e=2(1-e^3)$$

मान लो प्रक्षेप वेग के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर अवयव u एवं v है।

A से B तक गति का समय $t_1=2u/g$

अतः परास

$$AB=ut_1$$

$$=2\ \frac{vu}{g}$$

B पर प्रतिक्षेप के पश्चात् ऊर्ध्वाधर वेग होगा ev; और चूँकि P पर संघात समक्ष है, P पर ऊर्ध्वाधर वेग शून्य होगा।
अतः B से P तक का समय

$$t_2=\frac{eu}{g}$$

B पर संघात के पश्चात भी क्षैतिज वेग ही रहेगा। अतः दूरी

$$BE=ut_2=\frac{evu}{g}$$

P पर संघात के पश्चात् कण क्षैतिज वेग eu से वापिस गति प्रारम्भ करेगा। चाप PC के अनु गति करने में उतना ही समय लगेगा जितना कि B से P तक जाने में लगा था, t_2

अतः

$$EC=eut_2=\frac{e^2uv}{g}$$

C पर संघात के पूर्व कण का ऊर्ध्वाधर वेग ev हो जायेगा, तथा संघात के पश्चात यह होगा e^2v

अतः C से D तक का समय होगा,

$$t_3=\frac{2e^2v}{g}$$

D पर संघात के पश्चात् ऊर्ध्वाधर वेग होगा e^3v

इसी प्रकार D से A तक का समय होगा,

$$t_4=\frac{2e^3v}{g}$$

अतः P से A तक का समय,

$$t_2+t_3+t_4=\frac{ev}{g}(1+2e+2e^2)$$

P से A तक की गति में कण का क्षैतिज वेग eu अचर रहा है।

अतः A की दीवाल से दूरी,

$$AE=eu(t_2+t_3+t_4)$$

$$=\frac{e^2uv}{g}(1+2e+2e^2)$$

यही दूरी है,

$$AB+BE=\frac{2vu}{g}+\frac{evu}{g}$$

$$=\frac{vu}{g}(2+e)$$

अतः

$$\frac{vu}{g}(2+e)=\frac{e^2uv}{g}(1+2e+2e^2)$$

या

$$2e^4+2e^3+e^2-e-2=0$$

अर्थात्

$$(e+1)(2e^3+e-2)=0$$

चूंकि

$$e\neq-1,$$

हमें प्राप्त होगा

$$2e^3+e-2=0$$

(5) क्षैतिज तल के किसी बिन्दु से एक कण क्षितिज से कोण α बनाते हुए प्रक्षिप्त किया जाता है, तथा एक ऊर्ध्वाधर तल के एक प्रतिक्षेप के पश्चात् पुनः प्रक्षेप बिन्दु पर लौट आता है। यदि प्रक्षेप बिन्दु से क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर दिशाओं में x एवं y नापे जायें, तो सिद्ध करो कि संघात बिन्दु निम्न रेखा पर स्थित होगा :

$$y(1+e)=X\tan\alpha,$$

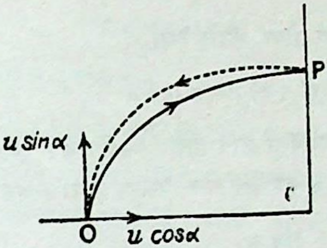
यदि प्रक्षेप कोण न ज्ञात होकर, प्रक्षेप वेग ज्ञात हो, तो सिद्ध करो कि संघात बिन्दु का बिन्दुपथ निम्न दीर्घवृत्त होगा :

$$x^2+(1+e)^2y^2=4eHy$$

जहाँ H प्रक्षेप वेग के कारण चली हुई ऊर्ध्वाधर दूरी है।

(i) मान लो प्रक्षेप वेग u है, तथा संघात विन्दु P के निर्देशांक हैं (h, k) तब O से P तक का समय

$$t_1 = h/u \cos \alpha$$



तथा P से वापिस O पर आने का समय

$$t_2 = h/eu \cos \alpha$$

अत: संपूर्ण उड्डयन काल

$$t_1 + t_2 = \frac{h}{u \cos \alpha} \frac{(e+1)}{e} \qquad (1)$$

चूंकि P पर संघात के कारण कण का ऊर्ध्वाधर वेग अपरिवर्तित रहता है, अत: संपूर्ण उड्डयन काल होगा

$$T = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1) और (2) से प्राप्त होगा

$$\frac{2u \sin \alpha}{g} = \frac{h}{u \cos \alpha} \frac{(e+1)}{e} \qquad \ldots \qquad (3)$$

अब u वेग से α कोण पर प्रक्षिप्त होने से कण के परवलय पथ का समीकरण होगा।

$$y = x \tan \alpha - 1/2 \frac{gX^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

P इस पर स्थित है, अत:

$$k = h \tan \alpha - 1/2\, g \frac{h^2}{u^2 \cos^2 \alpha} \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3) और (4) की सहायता से u का विलोपन करने पर

$$K = h \tan \alpha - \frac{h^2}{\cos^2 \alpha} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{h} \frac{e}{1+e}$$

$$= h \tan \alpha \cdot \frac{1}{1+e}$$

अत: (h, k) का बिन्दु पथ होगा, सरल रेखा

$$(1+e)\, y = x \tan \alpha$$

(ii) यदि प्रक्षेप कोण न ज्ञात होकर, प्रक्षेप वेग ज्ञात हो, तब हमें (3) और (4) की सहायता से α का विलोपन करना होगा। अब (5) से प्राप्त होगा

$$\frac{\cos \alpha}{h} = \frac{\sin \alpha}{K(1+e)} = \frac{1}{\sqrt{(h^2+k^2(1+e)^2)}}$$

(3) में $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$4\frac{(u^2)}{2g} \frac{K(1+e)}{\sqrt{(h^2+k^2(1+e))^2}} = \frac{(e+1)}{e} \cdot \sqrt{(h^2+k^2(1+e))^2}$$

चूँकि

$$u^2/2g = H$$

दिया है,

अत: (h, k) का बिन्दु पथ होगा

$$4\,Hey = x^2 + (1+e)^2 y^2,$$

जो कि एक दीर्घवृत्त है।

6. किसी स्थिर क्षैतिज समतल पर कोई कण h ऊँचाई से गिरता है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो सिद्ध करो कि प्रतिक्षेप बन्द होने से पूर्व समस्त चलित दूरी

$$\frac{1+e^2}{1-e^2}\, h$$

होगा, एवं सम्पूर्ण समय

$$\sqrt{\left(\frac{2h}{g} \frac{1+e}{1-e}\right)}$$

होगा।

7. एक प्रत्यास्थ क़ण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि वह एक ऊर्ध्वाधर दीवार से प्रतिक्षिप्त होकर उसी प्रक्षेप बिन्दु पर वापिस लौट आता है। यदि प्रक्षेप कोण α हो, और यदि कण के पथ की उस समय की दिशा जब वह प्रक्षेप बिन्दु पर लौटता है, क्षितिज से β कोण बनाती हो, तो दर्शाओ कि

$$\tan \alpha = e \tan \beta,$$

जहाँ e प्रत्यानयन गुणांक है।

8. एक चिकनी गोल मेज के चारों ओर एक चिकना सीधा उठा हुआ किनारा लगा है। एक गेंद, जिसका प्रत्यानयन गुणांक e है, किनरे के एक बिन्दु के मेज पर प्रक्षिप्त की जाती है। इसकी दिशा बिन्दुगत त्रिज्या से कोण

$$\tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)}$$

बनाती है। सिद्ध करो कि दो बार किनारे से प्रतिक्षिप्त होने के पश्चात् गेंद फिर प्रक्षेपण बिन्दु पर लौट आयेगी। यह भी सिद्ध करो कि जब गेंद प्रक्षेप बिन्दु पर लौटती है तो उसके वेग पर प्रक्षेप वेग $e^{3/2} : 1$ का अनुपात होगा।

9. दो चिकनी समान्तर ऊर्ध्वाधर दीवालों में से एक के मूल से एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि तीन बार प्रतिक्षिप्त होकर वह प्रक्षेप बिन्दु पर लौट आये। यदि अन्तिम संघात समक्ष हो, तो सिद्ध करो कि

$$e^3+e^2+e=1$$

10. दो चिकनी समान्तर ऊर्ध्वाधर दीवालों के बीच की दूरी a है। एक दीवाल के किसी बिन्दु से कोई कण उस ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षिप्त किया जाता है, जो दोनों पर लम्ब है। दोनों दीवालों पर से एक-एक बार प्रतिक्षिप्त होकर कण पुनः दूसरी दीवाल से प्रक्षेप बिन्दु के ठीक सामने के बिन्दु पर (जो कि प्रक्षेप बिन्दुगत क्षैतिज तल में है) संघात करता है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तथा क्षैतिज तल पर कण की परास b हो, तो दर्शाओ कि

$$be^2=a(1+e+e^2)$$

11. एक चिकनी गेंद भूमि से u वेग से इस प्रकार प्रक्षिप्त की जाती है कि

वह प्रमेय बिन्दु से d दूरी पर स्थिर एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवाल से प्रक्षिप्त होकर वापिस भूमि पर आये। दर्शाओ कि वह दीवाल से प्रतिक्षिप्त होकर अधिकतम

$$e\left(\frac{u^2}{g}-d\right)$$

क्षैतिज दूरी पर गिरेगी।

12. एक वर्गाकार मेज $ABCD$ के किनारे उठे हुए हैं और उसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है। AB भुजा के किसी बिन्दु P से एक कण प्रक्षिप्त किया जाता है, जिसका प्रत्यानयन गुणांक e है। यह अन्य भुजाओं BC, CD, DA से बिन्दुओं Q, R, S पर संघात करता है। सिद्ध करो कि PQ एवं RS समान्तर हैं। मान लो

$$\angle QPB=\alpha,$$

तथा

$$BP=X,$$

यदि कण P पर वापिस आता है, तब

$$X(1-e)=a(1-e\cot\alpha)$$

13. एक अपूर्णतः प्रत्यास्थ गेंद किसी वृचि की परिधि से परावर्तित होकर एक अन्तः चतुर्भुज की भुजाओं के अनुक्रम से चलती है। सिद्ध करो कि चतुर्भुज के दो सम्मुख कोण समकोण है, तथा प्रक्षेपण की आरम्भिक दिशा भी ज्ञात करो।

14. एक क्षैतिज तल के किसी बिन्दु से एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि ऊर्ध्वाधर दीवाल से लम्बरूप टकराये। दीवाल से प्रतिक्षिप्त होकर लौटने के बाद कण एक बार क्षैतिज तल से प्रतिक्षिप्त होता है तब वह पुनः प्रक्षेप बिन्दु पर लौट आता है। सिद्ध करो कि प्रत्यानयन गुणांक $1/2$ है।

15. एक कण भूमि से एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवाल की ओर इस प्रकार प्रक्षिप्ति किया जाता है कि दीवार से प्रतिक्षिप्त होकर पुनः प्रक्षेप बिन्दु पर लौट आये। यदि प्रक्षेप कोण α हो, तो सिद्ध करो कि

$$\tan\alpha=\frac{egt^2}{2a(1+e)}$$

जहाँ a प्रक्षेप बिन्दु से दीवार की दूरी, t सम्पूर्ण उड्डयन काल एवं e प्रत्यानयन गुणांक है।

16. एक समकोण समद्विबाहु क्षैतिज त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि कर्ण तथा अन्य भुजा से प्रतिक्षिप्त होकर वह पुनः प्रक्षेपण बिन्दु पर लौट कर आ जाये। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो सिद्ध करो कि परावर्तन कोणों के कोस्पज्या (cotangents) क्रमशः $e+1$ एवं $e+2$ होंगे।

6.4. संघात से गतिज ऊर्जा की क्षति (Loss of Kinetic Energy by Impact)

दो गोले जिनके द्रव्यमान एवं वेग ज्ञात हैं आपस में संघात करते हैं, सिद्ध करना है कि सामान्यतः संघात के कारण गतिज ऊर्जा में क्षति होती है

(a) **समक्ष संघात**

समीकरण हैं

$$mv+m'v'=mu+m'u' \qquad \text{(i)}$$

$$v-v'=-e(u-u') \qquad \text{(ii)}$$

(ii) के वर्ग में mm' का गुणा करके (i) के वर्ग में जोड़ने पर

$$(mv+m'v')^2+mm'(v-v')^2=(mu+m'u')^2+mm'e(u-u')^2$$

$$=(mu+m'u')^2+mm'(u-u')^2$$

$$-mm^1(1-e^2)(u-u)^2$$

अर्थात्

$$(m+m')(mv^2+m'v'^2)=(m+m')(mu^2+m'u'^2)$$

$$-mm'(1-e^2)(u-u')^2$$

अतः $m+m'$ के दोनों पक्षों में भाग देने पर प्राप्त होगा

$$mv^2+m'v'^2=mu^2+m'u'^2-\frac{mm'}{m+m'}(1-e^2)(u-u')^2$$

गतिज ऊर्जा में ह्रास

$$=\left(\frac{1}{2}mu+\frac{1}{2}m'u'^2\right)-\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(1-e^2)(u-u')^2$$

यह ह्रास तब तक शून्य नहीं होता, जब तक कि e एक के तुल्य नहीं होता, अर्थात् जब तक गोले पूर्णतया प्रत्यास्थ न हों।

(b) तिर्यक संघात

अनुच्छेद 6.2 के संकेतन के अनुसार समीकरण हैं

$$u \sin \alpha = v \sin \theta \tag{1}$$

$$u' \sin \beta = v' \sin \phi \tag{2}$$

एवं

$$V \cos \theta - v' \cos \phi = -e(u \cos \alpha - u' \cos \beta) \tag{3}$$

$$mv \cos \theta + m'v \cos \phi = mu \cos \alpha + m'u' \cos \beta \tag{4}$$

(3) के वर्ग में mm' का गुणा करके (4) के वर्ग में जोड़ने पर प्राप्त होगा

$$(mv \cos \theta + m'v' \cos \phi)^2 + mm' (v \cos \theta - v' \cos \phi)^2$$

$$= (mu \cos \alpha + m'u' \cos \beta)^2 + mm'e^2(u \cos \alpha - u' \cos \beta)^2$$

$$= mu \cos \alpha + m^1u^1 \cos \beta)^2 + mm^1(u \cos \alpha - u^2 \cos \beta^2$$

$$-(1-e^2)mm^1(u \cos \alpha - u^1 \cos \beta)^3$$

अर्थात्

$$(m+m')(mv^2 \cos^2 \theta + m'v'^2 \cos^2 \phi)$$

$$= (m+m')(mu^2 \cos^2 \alpha + m'u'^2 \cos^2 \beta)$$

$$-(1-e^2)mm'(u \cos \alpha - u' \cos \beta)^2$$

या

$$(mv^2 \cos^2 \theta + m'v'^2 \cos^2 \phi) = (mu^2 \cos^2 \alpha + m'u'^2 \cos^2 \beta)$$

$$-(1-e^2) \frac{mm'}{m+m'}, (u \cos \alpha - u' \cos \beta)^2 \tag{5}$$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में ह्रास

$$= \left(\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} m'u'^2\right) - \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m'v'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m(u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} m^1(u'^2 \cos^2 \beta + u'^2 \sin^2 \beta)$$

$$-\frac{m}{2} (v^2 \cos^2 \theta + v^2 \sin^2 \theta) - \frac{m'}{2} v^2 \cos^2 \phi + v'^2 \sin^2 \phi)$$

अब (1) एवं (2) का उपयोग करके प्राप्त होगा

$$=\left(\frac{1}{2}mu^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}m'u'^2\cos^2\beta\right)-\left(\frac{1}{2}mv^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}m'v'^2\cos^2\phi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(1-e^2)(u\cos\alpha-u'\cos\beta^2),\ (5) \text{ से ।}$$

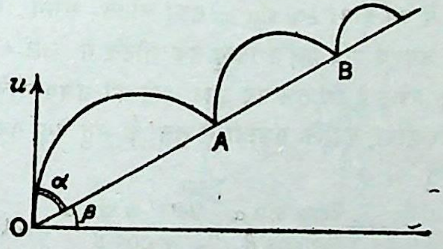
चूँकि $e<1$, उपरोक्त व्यंजक धनात्मक है, अतः सिद्ध हुआ कि संघात से हमेशा गतिज ऊर्जा में ह्रास होता है ।

विविध साधित उदाहरण

(1) एक आनत तल के किसी विन्दु से एक कण इस प्रकार प्रक्षिप्त किया गया है कि r वें संघात पर वह तल पर लम्बरूप आघात करता है, तथा n वें संघात पर पुनः प्रक्षेपण बिन्दु पर होता है । सिद्ध करो

$$e^n-2e^r+1=0$$

मान लो कि आनत तल का क्षैतिज से झुकाव β है ।



O प्रक्षेप बिन्दु से कण u वेग से नत तल से α के कोण पर प्रक्षिप्त किया जाता है । तब प्रक्षेप वेग के अवयव तल के अनु एवं उसके लम्ब रूप दिशा में क्रमशः $u\cos\alpha$ एवं $u\sin\alpha$ हैं, तथा इन दिशाओं में गुरुत्व के कारण त्वरण क्रमशः $-g\sin\beta$ एवं $-g\cos\beta$ होंगे ।

प्रथम प्रक्षेप पथ OA का समय है

$$\frac{2\ u\sin\alpha}{g\cos\beta}$$

प्रथम संघात के पश्चात तल के लम्बरूप दिशा में वेग होगा $e \sin \alpha$, किन्तु तल के अनु वेग का अवयव संघात से अपरिवर्तित रहेगा। अतः द्वितीय प्रक्षेप पथ AB का समय होगा—

$$\frac{2eu \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

इसी प्रकार उत्तरगामी प्रक्षेप पथों के समय होंगे

$$\frac{2e^2 u \sin \alpha}{g \cos \beta}, \frac{2e^3 u \sin \alpha}{g \cos \beta}, \text{ आदि}$$

यदि नत तल के ऊपर की ओर गति का संपूर्ण समय t है

$$t = \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \{1 + e + e^2 + \ldots r \text{ पदों तक}\}$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \frac{1 - e^r}{1 - e} \qquad (1)$$

तल से r वें संघात के क्षण पर कण तल के लम्बरूप दिशा में आघात करता है, अतः उस क्षण तल के अनु वेग शून्य हो जाता है; अतएव इस आघात के पश्चात कण तल पर नीचे की ओर लौटता है। r वें संघात के पश्चात कण का तल के लम्बरूप दिशा में वेग होगा $e^r u \sin \alpha$, तथा लौटते समय कण $(n-r$ प्रक्षेप पथ बनाता है; अतएव यदि प्रक्षेप बिन्दु तक लौटने में उसे t' समय लगता है, तब $t' = t$, यह स्पष्ट है कि तल पर ऊपर जाने का समय नीचे की ओर आने के समय के बराबर होगा, क्योंकि संघातों से तल के अनु वेग पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। किन्तु

$$t' = t = \frac{2eru \sin \alpha}{g \cos \beta} + \frac{2e^{r+1} u \sin \alpha}{g \cos \beta} + \ldots (n-r) \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{2e^r u \sin \alpha}{g \cos \beta} \{1 + e + e + \ldots + e^{n-r-1}\}$$

$$= \frac{2e^r u \sin \alpha}{g \cos \beta} \frac{1 - e^{n-r}}{1 - e} \qquad (2)$$

अतः (1) एवं (2) को बराबर करने पर प्राप्त होगा—

$$1 - e^r = e^r (1 - e^{n-r})$$

$$= e^r - e^n$$

अर्थात

$$e^{n}-2e^{r}+1=0$$

(2) एक गोल मेज के किनारे सीधे ऊपर की ओर उठे हुए हैं। मेज की परिधि के किसी बिन्दु से दो कण गति प्रारम्भ करते हैं। जब प्रत्येक दो बार किनारे से प्रतिक्षिप्त हो लेता है, तो एक कण प्रक्षेप बिन्दु पर लौट आता है, किन्तु दूसरा इसके बिल्कुल विपरीत, व्यास के दूसरे छोर पर पहुँच जाता है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, एवं प्रक्षेप की दिशायें बिन्दु पर की त्रिज्या से कोण α एवं β बनायें, तो सिद्ध करो

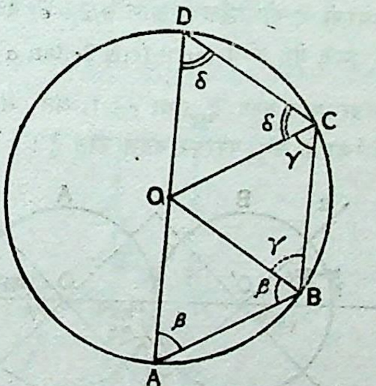
$$\tan \alpha \,.\, \tan \beta = e^2$$

प्रथम कण के लिये हमें अनुच्छेद 6.2 के उदाहरण 2 से ज्ञात है कि—

$$\tan^2 \alpha = \frac{e^3}{1+e+e^2} \tag{1}$$

दूसरे कण के लिये A प्रक्षेप बिन्दु है B, C एवं D संघात बिन्दु हैं, AD व्यास है। B एवं C पर परावर्तन कोण γ एवं δ हैं। तब

$$\cot \gamma = e \cot \beta, \ \cot \delta = e \cot \gamma = e^2 \cot \beta$$



तथा

$$\beta+\gamma+\delta=\pi, \ \therefore \ \beta+\gamma=\pi-\delta$$

अत:

$$\cot(\beta+\gamma)=\cot(\pi-\delta)$$

या

$$\frac{\cot\beta\cot\gamma-1}{\cot\beta+\cot\gamma}=-\cot\delta$$

या

$$\frac{e\cot^2\beta-1}{\cot\beta+e\cot\beta}=-e^2\cot\beta$$

या

$$e\cot^2\beta-1=-(e^2+e^3)\cot^2\beta$$

$\therefore$

$$\cot^2\beta=1/(e+e^2+e^3)$$

अत:

$$\tan^2\beta=e+e^2+e^3 \qquad (2)$$

(1) एवं 2 से

$$\tan^2\alpha.\tan^2\beta=\frac{e^3}{1+e+e^2}\times e(1+e+e^2)$$

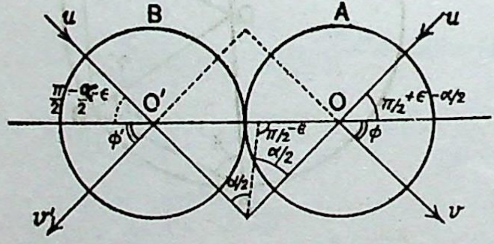
$$=e^4$$

$\therefore$

$$\tan\alpha\tan\beta=e^2$$

(3) दो तुल्य द्रव्यमान के पूर्णत: प्रत्यास्थ चिकने गोले, जिनके केन्द्र समान चाल से एक समतल में गतिमान हैं, तथा उनके वेगों की दिशायें α कोण पर झुकी हैं, इस प्रकार संघात करते हैं कि संघात के क्षण उनकी केन्द्र रेखा उनकी संघात पूर्व की दिशाओं के कोणार्द्धक से कोण $\pi/2-\epsilon$ बनाती है। दर्शाओ कि संघात के पश्चात उनके वेग कोण $\tan^{-1}(\cos 2\epsilon.\tan\alpha)$, पर झुके रहेंगे।

हल : चूंकि द्रव्यमान तुल्य हैं, तथा $e=1$, अत: संघात के पहिले के वेग के अवयव, केन्द्र रेखा के अनु, परस्पर बदल जाते हैं।



अत: संघात के पश्चात केन्द्र रेखा के अनु A एवं B के वेग क्रमश: होंगे—

$$u\sin(\alpha/2+\epsilon)$$

एवं

$$u\sin(\theta/2-\epsilon)$$

तथा केन्द्र रेखा के लम्बानुरेख वेगों के अवयव संघात से अपरिवर्तित रहते हैं। अतः इस दिशा में A एवं B के वेगों के अवयव हैं—

$$u \cos (\theta/2-\epsilon)$$

एवं

$$u \cos (\alpha/2+\epsilon)$$

अतः

$$\tan \phi = \frac{OO' \text{ के लम्बरूप अवयव}}{OO' \text{ के अनु अवयव}} = \frac{\cos (\alpha/2-\epsilon)}{\sin (\alpha/2+\epsilon)} \quad \text{(i)}$$

तथा

$$\tan \phi' = \cos (\alpha/2+\epsilon)/\sin (\alpha/2-\epsilon) \quad \text{(ii)}$$

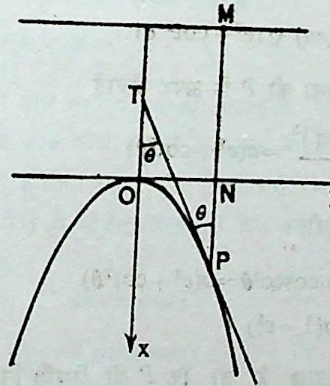
स्पष्ट है कि संघात के पश्चात वेग v एवं v' के बीच कोण है $\pi-(\phi+\phi')$, अतः

$$\tan \{\pi-(\phi+\phi')\} = -\frac{\tan \phi+\tan \phi'}{1-\tan \phi.\tan \phi'} = \tan \alpha \cos 2\epsilon$$

(i) व (ii) से मान रखने पर।

(4) एक ऊर्ध्वाधर परवलय का शीर्ष ऊपर की ओर है। उसकी क्षैतिज नियता पर से समान रूप से प्रत्यास्थ अनेक कण नीचे की ओर गिरते हैं तथा चिकने परवलय से संघात करके अन्य परवलीय मार्गों में चलते हैं। सिद्ध करो कि उत्तरगामी परवलयों की एक ही निश्चित नियता होगी।

मान लो परवलय का समीकरण है $y^2=4ax$, जहाँ O उसका शीर्ष है। मान



लो P बिन्दु पर कण का परवलय से संघात होता है। मान लो P पर स्पर्शी PT अक्ष से कोण θ बनाती है। स्पर्शी PT का समीकरण होगा—

$$y = mx + \frac{a}{m} \text{ जहाँ } m = \tan\theta$$

अर्थात

$$y = x \tan\theta + a \cot\theta$$

P बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$(a \cot^2\theta,\ 2a \cot\theta)$$

$$\therefore \qquad PM = PN + NM = a\cot^2\theta + a = a \operatorname{cosec}^2\theta$$

अत: MP दूरी से गिरने से उत्पन्न वेग

$$= \sqrt{(2ga \operatorname{cosec}^2\theta)} = \sqrt{(2ga)}.\operatorname{cosec}\theta$$

यह P पर वेग v का परिमाण होगा, तथा स्पर्शीय दिशा TP तथा इसके लंबानुरेख दिशा में वेग के अवयव क्रमश: होंगे

$$\sqrt{(2ga)} \operatorname{cosec}\theta.\cos\theta$$

एवं

$$\sqrt{(2ga)} \text{ casec } \theta.\sin\theta$$

अर्थात

$$\sqrt{(2ga)}.\cot\theta \text{ एवं } \sqrt{(2ga)}.$$

P पर संघात से स्पर्शी के अनु वेग अपरिवर्तित रहता है, तथा अभिलम्बीय वेग $e\sqrt{(2ga)}$ हो जाता है। अत: संघात के पश्चात वेग होगा

प्रतिक्षेप का वेग

$$= \sqrt{(2ga)}\ \sqrt{(e^2 + \cot^2\theta)}$$

अत: उत्तरगामी पथ की नियता की P के ऊपर ऊँचाई

$$= \frac{(P \text{ पर वेग})^2}{2g} = a(e^2 + \cot^2\theta)$$

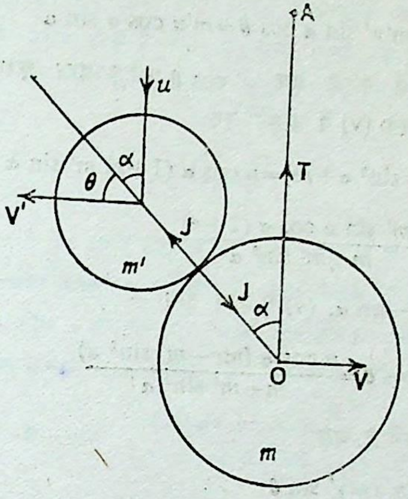
$\therefore$ $2M$ के नीचे उसकी दूरी

$$= a \operatorname{cosec}^2\theta = a(e^2 + \cot^2\theta)$$

$$= a(1 - e^2)$$

यह अचर है, अत: θ से स्वतन्त्र है जो कि P की स्थिति निश्चित करता है। अतएव संघात चाहे किसी बिन्दु पर हो, उत्तरगामी पथों की नियता एक निश्चित क्षैतिज रेखा रहेगी।

(5) m द्रव्यमान का गोला A डोरी से एक स्थिर बिन्दु से लटकाया गया है, तथा वह विरामावस्था में है। एक दूसरा m' द्रव्यमान का गोला, जो ऊर्ध्वारत: नीचे को गिर रहा है, u वेग से उस पर इस प्रकार संघात करता है



कि गोलों की केन्द्र रेखा ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाती है। सिद्ध करो कि संघात से गतिज ऊर्जा में ह्रास होगा—

$$\frac{1}{2}\frac{(1-e^2)\,mm^1u^2\cos^2\alpha}{m+m^1\sin^2\alpha}$$

जहाँ e प्रत्यानयन गुणांक है।

हल : मान लो गोले m एवं m' के संघात के पश्चात वेग v एवं v' हैं। v' की दिशा केन्द्र रेखा से θ कोण बनाती है, तथा m गोले की गति तो केवल डोरी के लम्बरूप दिशा में होगी। मान लो किसी भी गोले पर केन्द्र रेखा के अनु आवेग J है, तथा डोरी में आवेगी तनाव T है। तब m गोले की गति से निम्न समीकरण प्राप्त होंगे—

$$J\cos\alpha=T \quad \text{(i)}$$

$$J\sin\alpha=mv \quad \text{(ii)}$$

केन्द्र रेखा के अनु. न्यूटन के नियम से हमें प्राप्त होगा—

$$v'\cos\theta+V\sin\alpha=eu\cos\alpha \quad \text{(iii)}$$

m^1 के संवेग में परिवर्तन है

$$m'(u \cos \alpha + v' \cos \theta) = J \quad \text{(iv)}$$

(ii) एवं (iv) से प्राप्त होगा—

$$mV - m'v' \sin \alpha \cos \theta = m'u \cos \alpha \sin \alpha \quad \text{(v)}$$

(iv) एवं (v) को हल करके हम $v' \cos \theta$ एवं V प्राप्त करते हैं। (iii) में $m' \sin \alpha$ का गुणा करके (v) में जोड़ने पर

$$V(m' \sin^2 \alpha + m) = u \cos \alpha (1+e) m' \sin \alpha$$

$$\therefore \quad V = \frac{um' \sin \alpha \cos \alpha (1+e)}{m + m' \sin^2 \alpha} \quad \text{(vi)}$$

इसी प्रकार mx (iii)—$\sin \alpha$. (v) से प्राप्त होगा—

$$v' \cos \theta = \frac{u \cos \alpha (me - m' \sin^2 \alpha)}{m + m' \sin^2 \alpha} \quad \text{(vii)}$$

चूँकि गोले चिकने हैं, अत:

$$u \sin \alpha = v' \sin \theta$$

अत: संघात के गतिज ऊर्जा में ह्रास

$$= \tfrac{1}{2}m'u^2 (\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha) - \{\tfrac{1}{2}m'v'^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \tfrac{1}{2}mv^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2}m'u^2 \cos^2\alpha - \tfrac{1}{2}m'v'^2 \cos^2\theta - \tfrac{1}{2} mV^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m'u^2 \cos^2\alpha \left\{ 1 - \frac{(me - m' \sin^2\alpha)^2 + mm' \sin^2\alpha(1+e)^2}{(m+m' \sin^2\alpha)^2} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}m'u^2 \cos^2\alpha \left\{ \frac{m^2 + mm' \sin^2\alpha - m^2e^2 - mm' \sin^2\alpha n^2}{(m+m' \sin^2 \alpha)^2} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} m'mu^2 \cos^2 \alpha \frac{m(1-e^2)(m+m' \sin^2 \alpha)}{(m+m' \sin^2 \alpha)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} mm'u^2 (1-e^2) \cos^2\alpha/(m+m' \sin^2\alpha)$$

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली 37

6. दो तुल्य चिकने गोले परस्पर स्पर्श करते हुए विरामावस्था में एक मेज पर रखे हैं। एक तीसरा तुल्य गोला सममित रूप से उन दोनों पर संघात

करता है। दर्शाओ कि संघात से गोलों की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा $(2+3e^2):5$ के अनुपात में घट जाती है।

7. α आनति वाले नत तल के पाद से एक प्रत्यास्थ कण प्रक्षिप्त किया जाता है, तथा वह तल पर लम्बरूप दिशा में आघात करता है। यदि तल से कण का प्रक्षेप कोण β हो, तो सिद्ध करो कि $2\tan\alpha\tan\beta=1$. यदि दो प्रतिक्षेपों में कण प्रक्षेप बिन्दु पर वापिस आ जाये, तो सिद्ध करो—

$$e=\frac{\sqrt{(5-1)}}{2}$$

8. एक चिकनी गेंद अपने बराबर की दूसरी चिकनी गेंद से, जो विरामावस्था में है, संघात करती है। संघात के समय पहली गेंद के वेग की दिशा केन्द्र रेखा से कोण α बनाती है। यदि प्रत्यास्थता गुणांक e हो, तो सिद्ध करो कि संघात करने वाली गेंद के विचलित होने का कोण θ होगा,

$$\theta=\tan^{-1}\left\{\frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}\right\}$$

9. एक दीर्घ वृत्ताकार मेज का किनारा सीधा ऊपर को उठा है। एक पूर्णतः प्रत्यास्थ गेंद उसकी नाभि से प्रक्षिप्त की जाती है। सिद्ध करो कि चाहे जिस प्रकार से भी गेंद प्रक्षिप्त की जाये, अन्ततः वह दीर्घ अक्ष के अनु ही गतिमान होगी।

10. कई कण एक ही बिन्दु से समान वेगों से किसी ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षिप्त किये जाते हैं तथा वे केवल गुरुत्व द्वारा ही प्रेरित होते हैं। यदि वे समान रूप से प्रत्यास्थ हों, तथा एक ऊर्ध्वाधर दीवाल से संघात करें, तो सिद्ध करो कि कणों के उत्तरगामी पथों के शीर्ष एक दीर्घवृत्त पर स्थित होंगे।

11. एक भारी पूर्णतया प्रत्यास्थ कण, एक ऊर्ध्वाधर वृत्त के उच्चतम बिन्दु से खींची गई जीवा के अनु फिसलता है। कण वक्र पर संघात के पश्चात वृत्त के निम्नतम बिन्दु से गुजरता है। सिद्ध करो कि जीवा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव होगा—

$$\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(3-1)}}{4}\right\}$$

12. दो तुल्य प्रत्यास्थ गेंदे एक दूसरे की ओर एक ही क्षण पर एक ऊर्ध्वाधर तल में एक से प्रक्षेप वेग v से, तथा समान प्रक्षेप कोण α पर प्रक्षिप्त की जाती है। दर्शाओ कि संघात के पश्चात वे प्रक्षेप बिन्दुओं पर वापिस आ जायेंगी यदि—

$$ga\,(1+e)=ev^2 \sin 2\alpha,$$

जहाँ $2a$ प्रक्षेप बिन्दुओं के बीच की दूरी है।

13. एक कण भूमि से प्रक्षेप कोण α पर इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाता है कि एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवाल पर संघात करके प्रक्षेप बिन्दु पर वापिस आ जाये। यदि दीवाल से प्रतिक्षेप के पश्चात इसके वेग की दिशा क्षैतिज से कोण ϕ बनाये, तो सिद्ध करो कि

$$e(1+e) \tan \phi=(1-e) \tan \alpha,$$

जहाँ e प्रत्यानयन गुणांक है।

14. m_1 द्रव्यमान का एक चिकना गोला एक दूसरे m_2 द्रव्यमान के विश्रांत चिकने गोले से संघात करता है, तथा वह अपनी दिशा से कोण θ से विचलित हो जाता है। संघात के पश्चात m_2 की दिशा m_1 की संघात-पूर्व दिशा से कोण ϕ बनाती है, तब सिद्ध करो

$$\tan \theta=m_2 \sin 2\phi/(m_1-m_2 \cos 2\phi)$$

जहाँ दोनों गोले पूर्णतः प्रत्यास्थ हैं।

15. एक गेंद, एक दूसरी विश्रांत गेंद से समक्ष संघात करके स्वयं विरामावस्था में आ जाती है। यदि संघात से आधी गतिज ऊर्जा का ह्रास हो जाता हो, तो सिद्ध करो कि प्रत्यानयन गुणांक $e=1/2$ होगा।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1

1. $y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = -9y$

4. $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

5. $y^2 = X^2 + 2xy\,\frac{dy}{dx}$

प्रश्नावली 2

1. $y - x = c\,(1 + xy)$

2. $\sqrt{(1 + y^2)} = cx$

3. $xy = ce^{y-x}$

4. $y + \frac{2}{3}(x - 2a)\sqrt{(a + x)} = c$

5. $e^y = e^x + \frac{1}{3}X^3 + c$

6. $X^2y=ce^y$

7. $y-\tan\frac{x+y}{2}=c$

8. $y=c(1-ay).(x+a)$

9. $\frac{x}{y}+c=-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}$

10. $\frac{x}{r}=1+e\cos\theta$

11. $X\,e^{y^2/x}=c$

प्रश्नावली 3

1. $y(x-y)^2=c(y-2x)$
2. $y=ce^{y/x}$
3. $\tan(y/2x)=cx$
4. $\log(y-x)=c+x/(y-x)$
5. $X^2-y^2=c(x^2+y^2)^2$
6. $x/y+\log xy=c$
7. $X^2=c(y+\sqrt{(x^2+y^2)})$
8. $(X-y)^3=c(x-y)$
9. $y+\sqrt{(y^2-x^2)}=cx^3$
10. $xy\cos\frac{y}{x}=c,$
11. $y^3=ce^{x^3/y^3}$

प्रश्नावली 4

1. $\log\{4y^2+(x-1)^2\}+\tan^{-1}\frac{2y}{x-1}=c$

2. $-\frac{1}{2}\log\left\{2\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2-1\right\}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}(x+1)-(y-1)}{\sqrt{2}(y+1)+(x-1)}$

$=\log c(x-1)$

3. $(x+3y)+2\log(2-x-y)=c$

4. $x+y-2=c(y-x)^3$

5. $(y-x)^2+10y-2x=c$

6. $4x+8y+5=ce^{4(x-2y)}$

7. $\tan^{-1}\{(2y+1)/(2x+1)\}=\log\{c\sqrt{(x^2+y^2+x+y+\frac{1}{2})}\}$

8. $\frac{2}{7}(2x+3y)-\frac{9}{49}\log(14x+21y+22)=x+c$

प्रश्नावली 5

1. $X=cye^{xy}$

2. $y=cxe^{xy}$

3. $\frac{1+\sqrt{3}(2x+ey)}{1-\sqrt{3}(2x+3y)}=ce^{2\sqrt{3}x}$

4. $x^2y\log x-y+x^3-\frac{1}{2}y^3=cx^2y$

5. $y=cx^2.e^{-1/xy}$

6. $8\sin y+4x+9\log(4x-8\sin y+3)=c$

प्रश्नावली 7

1. $y=(2x+c)\ e^{-x^2}$

2. $y=x^3+3x^2-2x\log x+cx$

3. $y=ce^{-\tan x+\tan X-1}$

4. $3(x^2+1)y=4x^3+c$

5. $y=\cos x+c \sec x$

6. $y=\frac{1}{4} e^{x}+ce^{-3x}$

7. $x=ce^{-\tan^{-1}y}+\tan^{-1} y-1$

8. $y=ce^{\sin x}-(1+\sin x)$

9. $2x \log y=\log^2 y+c$

10. $y=cx+x \log \tan x$

11. $y=cx\sqrt{(x^2-1)}+ax$

12. $xy=\sin x+c \cos x$

13. $2y=(x+a)^5+2c(x+a)^2$

14. $x=y^3+cy$

15. $(x-1) y=x^2(x^2-x+c)$

16. $2y=x^3+cx^3.e^{1/x^2}$

17. $(1+y^2)^2X=2 \log y+y^2+c$

18. $y=x+\cos 2x+c \sin 2x$

19. $3y=e^{x}+2e^{-2x}$

20. $3(1+x^2) y=4x^3$

प्रश्नावली 7

1. $(cx+2) xy^2=1$

2. $y^{-3}=-\frac{1}{2}+ce^{3x^2}$

3. $y(cx+\log ex)=1$

4. $cy=(1-y)\sqrt{((1-x^2))}$

5. $(x+1)^2y^3=\frac{1}{5}X^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+c$

6. $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3} X^3\left(\frac{2}{3} + \log x\right) + c$

7. $\frac{1}{xy} = c - \int X^{-1} \sin x dx$

8. $y^{-1} = C \cos x + \sin x$

9. $\sin y = (1+x)(e^x + c)$

10. $e^y = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$

11. $(c+x) ye^x + 1 = 0$

12. $y/x^2 = \cos y + y \sin y + c$

13. $(1+y^2)^2 x = 2 \log y + y^2 + c$

14. $X = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

15. $y = x \sin (y+c)$

16. $y^{-1} (\sec x + \tan x) = \cos x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

प्रश्नावली 8

1. $ye^{x^2} - x^2 = c$

2. $x^4 + 6xy + y^2 - 2y = c$

3. $(y+1)(x - e^y) = c$

4. $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$

5. $x + 2x^2y + 2xy^2 + y = c$

6 $y \cos 2x + 3y + \frac{2}{3} y^3 = c$

7. $(x^2+y^2)^{3/2} - 3xy = c$

8. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

9. $(e^{y+1}) \sin x = c$

10. $x^4y^3 + \log (x/y) = c$

प्रश्नावली 9

1. $1/x^3$, $2e^x+\frac{1}{2}ny^2/x^2=c$

2. $1/x^2y^2$, $\frac{x^2}{2}-1/xy=c$

3. $1/y^2$, $X^2+e^x/y=c$

4. $1/(x^2+y^2)$, $\tan^{-1}(y/x)=x^3+c$

5. $1/(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=ce^{2\tan^{-1}y/x}$

6. $1/y^4$; $x^2e^y+x^2/y+x/y^3=c$

7. $1/x^4y^4$; $\log y+1/x^2y^2+1/3x^3y^3=c$

8. $1/(x^2+y^2)$; $(x^2+y^2)\ e^{2y^4}=c$

9. X; $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c$

प्रश्नावली 10

1. $\frac{1}{y(x^2-y^2)}$; $(x-y)y^2=C(x+y)$

2. $\frac{1}{x^4y^4}$; $\log c/y=\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{3x^3y^3}$

3. $\frac{1}{(xy)^3}$; $y^6=ce^{-1}/(xy)^2$

4. x^2; $(4x^5+2x^4y+\frac{4}{3}x^3y^2+x^3y^3)y=c$

5. e^{x^2}; $(2x^2y^2+4xy+y^4)e^{x^2}=c$

6. e^x; $(x^2+y^2)e^x=c$

7. y; $3x^2y^4+6xy^2+2y^6=c$

8. xy^3; $x^2y^4(x+y^2)=c$

9. xy; $4x^3y^2+x^4y^5=c$

10. $1/(3x^3y^3)$; $\log x^2/y - 1/xy = c$

11. $1/X^3$; $e^x + \frac{1}{2} my^2/x^2 = c$

12. $1/y^2$; $x^3y^3 + x^2 = cy$

13. $\frac{1}{x^2y^2}$; $x^2y^2 + xy \log \frac{cx}{y} = 1$

प्रश्नावली 11

1. $y^{-5} = cx^5 + 5/2x^3$

2. $y^{1/2} = c(1-x^2)^{1/4} - \frac{1-x'}{3}$

3. $x^4 - y^4 + 2x^2y^2 - 2a^2x^2 - 2b^2y^2 = c$

4. $cx = e^{x/y}$

5. $\tan y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

6. $x = ce^y - y - 2$

7. $\log (x/y) - 1/xy = c$

8. $a \log \{(x-y-a)/(x-y+a)\} = 2y + c$

9. $x^{-1} = 2 - y^2 + ce^{1/2y^2}$

10. $1/\log y = \frac{1}{2x} + cx$

11. $X + ye^{x/y} = c$

12. $(X+1) e^y = 2x + c$

13. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

14. $y^{1-n} = ce^{(n-1) \sin x} + 2 \sin x + 2/(n-1)$

15. $xy\sqrt{((x^2-y^2))} = c$

16. $\frac{-\sin x}{y^2} = xe^x - e^x + c$

17. $ey = ce^{-ex} + e^x - 1$

18. $y^2 = x^2 + cx - 1$

19. $\tan y = c\,(1 - e^x)^2$

20. $\frac{1}{2}\, e^{2y} = \frac{1}{3}\, e^{3x} + \frac{x^3}{3} + c$

21. $x^2 + y^2 = c(x + y)$

22. $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-1/2\, y^2}$

23. $\log \sqrt{(x^2 + y^2)} - m \tan^{-1}(y/x) = c$

24. $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3} x^3 \left(\frac{2}{3} + \log x\right) + c$

25. $4x^9 = (c - 3x^8)(3y^2 + 2)^2$

26. $y = X \sin\,(y + c)$

27. $2y^3\, e^x = xe^{2x} + cx$

28. $x^2 y^2\,(y^2 - x^2) = c$

29. $1/(x+y)^2 = x^2 + 1 + ce^{x^2}$

30. $y = x^2 \cos x + cx \cos x$

31. $y = x^3(e^x - e)$

32. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

33. $xe^{\tan^{-1} y} = \tan^{-1} y + c$

34. $x^2 - xy + x - y^2 + 3y = c$

प्रश्नावली 12

1. $Y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots.. + \frac{x^n}{n!}$; $\lim_{n \to \infty} y_n(x) - e^x$

2. $y_3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8 \frac{1}{4400}x^{11}$

3. $y_3 = 1.12721$

प्रश्नावली 13

1. $(x^2-y^2-c)(x-cy)=0$
2. $(y-c)(y+x^2-c)(xy+cy+1)=0$
3. $(2y+x^2-c_1)(X+\log y-c_2)=0$
4. $(y-c)(y-x-c)(2y-x^2-c)(y-ce^{2x})=0$
5. $25(y+c)^2-4bx^5=0$
6. $(y-x-c)(y+2x-c)=0$
7. $(\log cx+\sin^{-1}(y/x))(\log cx-\sin^{-1}(y/x))=0$
8. $(2y-x^2+c)(xy-x+c)=0$

प्रश्नावली 14

1. प्राचल p में

$$x=c/p^2+\frac{3}{4}p^2$$

एवं y दिये गये समीकरण से

2. $x=p(c-\cosh p^{-1})(p^2-1)^{-1/2}$

एवं y दिये गये समीकरण से

3. $x=\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}(c+a\sin^{-1}p)$

एवं y दिये गये समीकरण से

4. $x=c\sqrt{p}-\frac{1}{3}p^2$

एवं y दिये गये समीकरण से

5. $\cos[\{\sqrt{(1-c^2+2cx-x^2)}-y\{/(p-x)]=c-x$

6. $(p-1)^2x=c-p+\log p;(x-1)^2y=p^2(c-2+\log p)+p$

7. $2y=c(c-x)^2$

8. $y^2=2xc+c^3y$

9. $\log y=cx+c^2$

10. $e^y=ce^x+c^3$

11. $x=c(p+1)e^p,\ y=cp^2e^p$

12. $cy=x^2+c^2$

प्रश्नावली 15

1. $x=2\log p+6p+c$

   एवं दिया गया समीकरण

2. $x+2p-2=ce^{-p}$

   एवं दिया गया समीकरण

3. $2y+c=a[p\sqrt{(1+x^2)}-\log(p+\sqrt{(1+p^2)})],\ x=a\sqrt{(1+p)^2}$

4. $x+c=b\log(p+\sqrt{(1+p^2)}),\ y=b\sqrt{(1+p)^2}$

5. $y=c(x-c)^2$

6. $y=cx+\dfrac{m}{x}$

7. $(y+c)^2+(x-b)^2=1$

8. $y^2-cx+2c^2=0$

प्रश्नावली 16

1. $y=cx+\cos^{-1}c$

2. $(y-cx)(c+1)=c$

3. $x=2(1-p)+ce^{-p}$

   $y=2-p^2+(1+p)ce^{-p}$

4. $y^3=3cx+6c^2$

5. $y^2=cx^2-\dfrac{2c}{1+c}$

6. $(y-cx+2c)(y-cx+1)=0$

7. $y^2=2cx+c^3$

8. $e^{2y}=ce^{2x}+c^2$

9. $c=\log(cx-y)$

10. $c=\sin(cx-y)$

विविध प्रश्नावली 17

1. $(y-c^2)^2=4cx$

2. $x=2(2-p)+ce^{-1/2p}$

   $y=8-p^2+(2+p)ce^{-1/2p}$

3. $(y-cx)^2=a^2c^2+b^2$

4. $y^2=cx^2-\dfrac{ac}{1+bc}$

5. $y=cx-\dfrac{ac^2}{1+c}$

6. $x=\sin p+c,\ y=p\sin p+\cos p$

7. $x=2\tan^{-1}p-p^{-1}+c;\ y=\log(p^3+p)$

8. $y^2=cx^2+c^2$

9. $y=2c\sqrt{x}+c^2$

10. $y^2=CX^2+1+c$

11. $y=x+\dfrac{c+e^{2x}}{c-e^{2x}}$

12. $c^2y^2+2cx=1$

13. $y^4=c(x-c)$

14. $\sin^{-1}(y/x)=\pm\log cx$

15. $y^3-a=(x+c)^2$

16. $cy=ce^x+c^3$

17. $(xc-p)^2/(1+c^2)=a^2$

18. $x=y+a\log(1+ce^{-y/a})$

19. $(x+c)^2+(x-b)^2=1$

20. $y=2c\sqrt{x}+f(c^2)$

प्रश्नावली 18

1. $y=cx-c^2$, वि॰ ह॰ $x^2=4y$

2. $y^2=2cx-c^2$, वि॰ ह॰ $y=\pm x$

3. $(x-c)^2=y^2(1-y)$ वि॰ ह॰ $y=1$

4. $y=cx+c^3$, वि॰ ह॰ $4x^3+27y^2=0$

5. कोई विचित्र हल नहीं

6. $y=cx+\sqrt{(b^2+a^2c^2)}$ / वि॰ ह॰ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

सामान्य हल सरल रेखाओं का कुल है, प्रत्येक रेखा दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

को स्पर्श करती है।

7. $(3y+2c)^2=4cx^3$, वि॰ ह॰ $6y=x^3$

8. $9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$, वि॰ ह॰ $x=0$

9. $y-cx=\frac{bc}{\sqrt{((1+c^2))}}$, $x^{2/3}+y^{2/2}=b^{2/3}$

10. $c^2+cxy+x=0$, वि॰ ह॰ $xy^2-4=0$

11. $x=3/4\,p^2+e/p^2$ एवं $y=$ दिया हुआ समीकरण | कोई विचित्र हल नहीं

12. $y=cx-a\sqrt{-c}$, वि॰ ह॰ $4xy=a^2$

प्रश्नावली 19

1. $x-x^2y=cy$

2. $r=c.e^{k\theta}$

3. $y^n=cx,\ 2y^n=3^n x$

4. $r^n=b^n \sin n\theta$

6. $x^2+y^2=ke^{-2\tan^{-2(y/x)}}$, ध्रुवीय निर्देशांक में $re^\theta=c$

7. $2x^2+3y^2=c^2$

10. परवलय $(y-x)^2-2a\ (y+x)+a^2=0$

11. $r=c\ (1+\cos\theta)$

12. $r^n=c \sin n\theta$

13. $r=c\ (1-\cos\theta)$

प्रश्नावली 20

4. $y=c_1\ e^{bx}+c_2e^{-9x}$

5. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$

6. $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x \cos\ (x\sqrt{(3+c_3)}$

7. $y=c_1\ c_2e^{bx}+c_3e^{-3x}$

8. $y=c_1e^{ax}+c_2e^{bx}+c_3e^{cx}$

9. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-3x}$

10. $y=c_1e^{-px} \cos\ (qx+c_2)$

11. $y=c_1 \cos x+c_2 \sin\ x+c_3e^x$

12. $y=c_1+c_2 \cos 2x+c_3 \sin 2x$

14. $\theta=\cos\ (t\sqrt{g/l})$

प्रश्नावली 21

1. $y=(c_1+c_2x) \cos x+(c_3+c_4x) \sin x$

2. $y=(c_1+c_2x)+(c_3+c_4x)e^{-x}$

3. $y=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{2x}$

4. $y=(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x$

5. $y=e^{-x/2}\left\{(c_1+c_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+(c_3+c_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$

6. $y=c_1\cos(x+c_2)+(b_3+c_4x)e^x$

7. $y=(c_1+c_2x)+c_3e^x+(c_4+c_5x)e^{-x/2}$

8. $y=c_1e^{mx/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}+c_2\right)+c_3e^{-mx/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}+c_4\right).$

9. $y=c_1e^{2x}+\left\{(c_2+c_3x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+(c_4+c_5x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\}e^{-x/2}$

प्रश्नावली 22

1. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$

2. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-2-5x$

3. $y=(c_1+c_2x)\frac{e^{-k}+e^x}{(k-1)^2}$

4. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+\frac{2}{9}e^{2x}$

5. $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\frac{1}{a}(x\sin ax)+\frac{1}{a^2}$ $(\cos ax\log\cos ax)$

6. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$

7. $y=c_1+e_2e^{-x}-e^x\log(1+e^x)-\log(1+e^x)$

8. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^x(x^2-x)$

9. $y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}-\frac{1}{18}+\frac{1}{36}x^2-\frac{25}{108}x$

प्रश्नावली 23

1. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$

2. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}+\frac{1}{18}e^{4x}-\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}$

3. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$

4. $e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$+e^x\left(c_3+\frac{2}{3}x\right)+\left(\frac{e^{2x}}{7}-1\right)$$

5. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}+\frac{x^5e^{-x}}{60}$

6. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}-e^{2x}\log x$

7. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x$

8. $y=c_1e^x\cos(\sqrt{3}x+c_2)+\frac{e^x}{2}\cos x$

9. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\frac{xe^x}{3}$

10. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{20}x^5e^{2x}$

11. $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{e^{2x}}{16}-\frac{x^2e^{-2x}}{2}$

प्रश्नावली 24

1. $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}-\frac{1}{50}(4\sin 2x+2\cos 2x)$

2. $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\sin x-\frac{1}{80}(3\sin 3x+\cos 3x)$

3. $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-3x}-\frac{1}{20}e^{2x}+\frac{2}{5}(\cos x+2\sin x)$

4. $y=c_1e^{2x}+c_2e^x-\frac{e^x}{8}(\sin 2x+\cos 2x)$

5. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+c_3e^{-8x}-\frac{1}{195}(\cos 3x+8\sin 3x)$

6. $y=e^x(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)-\frac{1}{10}e^{2x}(\cos x-2\sin x)$

7. $y=c_1e^{-x}+e^{x/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$+\frac{1}{2}(\cos x\ \sin x)$$

8. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}(2\sin h)(\sin x-\cos hx\cos x)$

9. $y=c^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$-\frac{1}{13}(2\cos 2x+3\sin 2x)$$

10. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x+\frac{1}{15}\sin 2x$

प्रश्नावली 25

1. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

2. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}$

3. $y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{-x}+\frac{x}{12}(2x^2-9x+21)$

4. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}(x-1)\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

5. $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x)+\frac{1}{8}(x^4-x+1)$

6. $y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}(x+1)\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

7. $y=(c_1+c_2x)e^x-(x\sin x+2\cos x)e^x$

8. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}(1-x\sin 2x)$

9. $y=c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+(x^4-3x^2)$

10. $y=c_1e^x+e_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^{3x}(x^2-x)$

विविध प्रश्नावली 26

1. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{36}(6x+5)+\frac{e^{px}}{p^2-5p+6}$

2. $y=(c_1+c_2e)e^{px}$

3. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}x\cosh x$

4. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$

5. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x+e^{3x}$

6. $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$

$$\frac{-e^x}{73}(8\cos 2x-3\sin 2x$$

7. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x$

8. $y=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}-\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{18}x\right)$

9. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{130}(9\cos 3x-7\sin 3x)$

10. $y=e^{-x/2}\left\{(c_1+c_2x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right.$

$$\left.+(c_3+c_4x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}+c_5e^{2x}$$

11. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin(x+c_4)-\frac{1}{5}e^x\cos x$

12. $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{1}{24}x^4\right)e^x$

13. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$+\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{16}{27}$$

14. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{8}x \cos x + \frac{1}{32}\sin x$

15. $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - x \cos 2x)$

16. $y = (c_1 x + c_2)\cos 2x + (c_3 x + c_4)\sin 2x$

$$+\frac{1}{32} - \frac{1}{64}x^2 \cos 2x$$

17. $y = (c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

$$+\frac{1}{8}(x^2 \cos x - 3x \sin x)$$

18. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(x \sin x + \cos x)$

$$+\frac{1}{12}xe^x(2x^2 - 3x + 9)$$

19. $y = e^{-2x}\left(c_1 + c_2 x - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{16}e^{2x}$

20. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{250}(25x^2 - 13)\sin 3x - \frac{2}{5}x \cos 3x$

21. $y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x}$

22. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-px} + B\left\{\frac{(p^2 - k^2)\cos kx + 2pk \sin kx}{(k^2 + p^2)^2}\right\}$

23. $y = c_1 e^{-x} + e^{x/2}\left[c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$

$$-\frac{xe^{x/2}}{6}\left\{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

24. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} - \frac{e^{2x}}{12}\left(x + \frac{17}{12}\right)$

25. $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$

$$+\left(\frac{3}{16}x^2-\frac{x^4}{48}\right)\cos x+\frac{x^2}{12}\sin x$$

26. $y^2=e^x-1$

प्रश्नावली 27

1. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\log\sin x-x\cos x$

2. $y=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x+\frac{e^x}{3}+1$

3. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-1+\sin 2x\log(\sec 2x+\tan 2x)$

4. $y=(c_1+c_2x)e^{3x}-e^{3x}\log x$

5. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{x^3}{12}\cos 2x$

$$+\frac{x^2}{16}\sin 2x+\frac{1}{32}x\cos 2x$$

6. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+c_3+\log\sec x$

$$-\sin x\log(\sec x+\tan x)$$

7. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-xe^{2x}$

प्रश्नावली 28

4. $V\cos a$, $V\sin a$; $\frac{-V^2\sin^2 a}{r}$, $\frac{V^2\sin a\cos a}{r}$,

जहाँ $\cot a=m$

5. त्रिज्य वेगवृद्धि $=-r\frac{v^2}{a^2}$, अनुप्रस्थ वेगवृद्धि$=\frac{2uv}{a}$

जहाँ $OP=r$, कीड़े की केन्द्र से दूरी

प्रश्नावली 29

1. $S=Ae^{\psi}+B$

प्रश्नावली 30

1. $k^2(2a-r)$, $4k^2a\,\theta$; $r=a\,\theta^2+c$

2. $\dot{\theta}=\dfrac{u}{2a}\sec\dfrac{\theta}{2}$

4. यदि AB ऊर्ध्व व्यास है तथा A वक्र व रेखा का स्पर्श बिन्दु है, तब P का वेग $= u\,.\,\dfrac{AP}{a}$, BP दिशा में

6. $S=\dfrac{u^2}{2f\cos\alpha}\left(e^{2\psi\cot\alpha}-1\right)$

8. $(c\psi+B)^2k^2=2ks+A$,
जहाँ A, B, C एवं K अचर हैं

9. $r=A\,\theta+B$,
जहाँ A एवं B अचर हैं

10. $\dfrac{v^2}{\sqrt{(16a^2-s^2)}}$

17. $x=-a\left[\log\tan\dfrac{\theta}{2}+\cos\theta\right]$, जहाँ $\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{a}\right)$

18. $\sin\phi=at$ या $\cos\phi=\sqrt{(1-a^2t^2)}$

प्रश्नावली 31

1. 4321.8 किलोवाट

2. 415 मीटरी अ० शक्ति

4. 152 फुट-पाउन्ड

5. 31.25 मील प्रति घन्टा

प्रश्नावली 32

1. 245 सें० मी०

4. $280\sqrt{2}$ मीटर/से०

8. $(M+m)g+\frac{M^2}{M+m}g\frac{h}{a}$ डाइन

11. $\frac{M}{(m+M)}$

प्रश्नावली 33

5. प्रत्येक स्थिति में बिन्दु पथ परवलय है ।

प्रश्नावली 35

17. m का वेग $=\frac{u(m-6em')}{m+6m'}$

m' का वेग $=\sqrt{3}\frac{u\,.\,1m(1+e)}{m+6m'}$

$T=\sqrt{3}m'v=\frac{3mm'u(1+e)}{m+6m'}$

पारिभाषिक शब्दावली

अवतल Concave

अवतलता Concavity

अन्वालोप Envelope

अनंतसूक्ष्म, अत्यणु Infinite simal

अनावर्त Non-repeated

अंतर्गत, अंतर्विष्ट Included

अवकलज Derivative

अध: स्पर्शी Subtangent

अधोलंब Subnormal

अर्धघन परवलय Semi cubical parabola

अधिकल्पित मूल Imaginary roots

अपवाद (अपवाद भूत) Exception (Exceptional)

अवकल गणित Differential calculus

अवकल गुणांक Differential coefficient

अवकल समीकरण Differential equation

अवकल समीकरण का घात Degree of equation

अवकल समीकरण की कोटि Order of differential equation

अवकल समीकरण निकाय System of differential equation

अवकल व्यंजक Differential expression

अवकल फलन Differential function

अवकल ज्यामिति Differential geometry

अस्पष्ट Implicit

असंतत फलन Discontinuous function

अनुप्रस्थ Transverse

अर Spoke

अनुक्रमानुपाती Directly proportionate

आपतन Incidence

आगमन Induction

आनति Inclination

आंशिक अवकल Partial differential

आवर्त काल Periodic time

आरोपित बल Impressed force

आवेग Impulse

इच्छित, अभीष्ट Required

उत्तरगामी Subsequent

उ्डयन काल Time of flight

उत्तरोत्तर अवकलन Successive differentiation

उत्तरोत्तर सन्निकटन Successive approximation

उत्केन्द्रता Eccentricity

उत्क्रमानुपाती Inversely proportional

उन्नतांश कोण या उन्नयन कोण Angle of elevation

ऊर्ध्वाधर Vertical

ऊर्ध्वारतः Vertically

एकसमान अभिसरण Uniform convergence

एकल Single

एकादिष्ट फलन Monotonic function

एकमानी फलन Single valued function

कार्य फलन Work functon

केंद्रीय बल Central force

कोटि Ordinate

कोणांक Amplitude

केन्द्र रेखा Line of centres

खंड करना Resolve (into factors)

खंडश: समाकलन Integration by parts

गुरुत्वीय त्वरण Gravitational acceleration

गोलक Bob

चलित निर्देशांक Current coordinates

चर घातांकी Exponential

चर घातांक Exponent

चाप Arc

जीवा (नाभिगत), नाभीय जीवा (Focal) Choral

तल Plane

त्वरण Acceleration

दीर्घ अक्ष Major axis

द्विघात समीकरण Quadratic equation

द्विक त्रिज्या Radius vector

ध्रुवीय Polar

ध्रुवांतक रेखा त्रिज्या Radius vector

नाभि Focus

नाभिलंब Latus rectum

निर्वात Vacuum

नियत fixed

नियता Directrix

नैज समीकरण Intrinsic equation

परावर्तन Reflection

परतंत्र चर Dependent variable

परिमेयकरण Rationalisation

पदिक समीकरण Pedal equation

परिलिखित वक्र Curve described

परिक्रमण करती है Turns round

पूर्वग Primitive

प्रतिक्षेप Rebound

प्रतिलोम अवकल संकारक Inverse differential operator

प्रक्रम Process

प्रतिच्छेद बिन्दु Point of intersection

प्रतिलोम बिन्दु Inverse points

प्रभावी बल Effective force

प्रक्षेप पथ Trajectory

प्रक्षेप्य Projectile

प्रक्षिप्त Projected

प्रक्षेपण (प्रक्षेप) Projection

प्रक्षेप कोण Angle of projection

प्रारम्भिक प्रतिबंध Initial condition

प्रारम्भिक मान समस्या Initial value problem

प्रेक्षण Obseration

बल गतिकी Kinetics

बारंवार अवकलन Repeated differentiation

भुज Abscissa

मध्यानुपाती Mean proportional

महत्तम ढाल रेखा Line of greatest slope

माध्यमान प्रमेय Meanvalue theorem

मात्रक Unit

यथातथ्य Exactness

यथातथ अवकल Exact differential

युगपत Simultaneous

रैखिक अवकल समीकरण Linear differential equation

रैखिक संवेग संरक्षण Conservation of linear momentum

लघु-अक्ष Minor axis

लोलक Pendulam

लंब कोणीय संछेदी Orthogonal trajectory

वलयाकार क्षेत्र Annular region

वक्र कुल Family of curves

वियोजित भाग Resolved part

विविक्तिकर Discriminant

विस्थापन Displacement

विश्लेषिक Analytical

विश्लेषिक विधि से Analytically

विशेष हल Particular solution

विचित्र हल Singular solution

विलोपन Elimination

विलोपन फल Eliminant

विलुप्त Eliminated

व्यापक समीकरण General equation

व्यापक हल (समाकल) General solution

(अश्व) शक्ति (Horse) Power

शांकव काट (परिच्छेद) Conic section

शुद्ध गतिकी Kinematic

सम षड्भुज Regular hexagon

समाकल्य Integrand

समानयन Reduction

समानयित Reduced

समकोणिक निर्देशांक Rectangular coordinates

समघात अवकल समीकरण Homogeneous differential equation

समाकलन गुणक Integrating factor

समान कोणिक Equiangular

समांतर Parallel

समक्ष संघात Direct impact

सदिश कोण Vectorial angle

सहायक समीकरण Auxiliary equation

समाकलनीय अवकल समीकरण Integrable differential equation

सर्पिल Spiral

साधारण Ordinary

सामीप्य Neighbourhood

सतत फलन Continuous function

सार्व विन्दु Common point

स्थितिज ऊर्जा Potential energy

सोपान Step

संकेतन Notation

संबद्ध करना Involve

संनाभि Confocal

संनाभि शांकव Confocal conics

संकेन्द्र वृत्त Concentric circles

संपूर्ण अवकल Total differential

संपीड़न Compression

संवेग Momentum

संरक्षी बल Conservative forecs

संचित ऊर्जा Stored energy

समाक्ष (परवलय) Coaxal (Parabolas)

स्वलांबिक Self orthogonal

स्वेच्छ फलन Arbitrary function

स्पष्ट फलन Explicit function

(सम) हर (Common) Denominator

सन्निकटन Approximation

हृदयाभ Cardioid

क्षेत्रीय वेग Areal velocity

त्रिघात वक्र Cubic curve

त्रिज्य वेग Radial vel

सन्दर्भ ग्रन्थ

1. Differential Equations by D. A. Murray
2. Differential Equations by H. T. H. Piaggio
3. Differential Equations by A. R. Forsyth
4. Ordinary Differential Equations by E. L. Ince
5. Elementary Differential Equations by Thornton C. Fry
6. Integral Calculus by Gorakh Prasad
7. Ordinary Differential Equations by Burkill
8. Intermediate Differential Equations by E. D. Rainville and Bedient
9. Dynamics of a particle and of Rigid Bodies by S. L. Loney
10. Dynamics by M. Ray
11. Elementary Dynamics by P. L. Shrivastava
12. Vectors and Dynamics by V.K. Varma, C. B. L. Verma and R. S. Shah
13. Text Book of Dynamics by F. Chorlton